



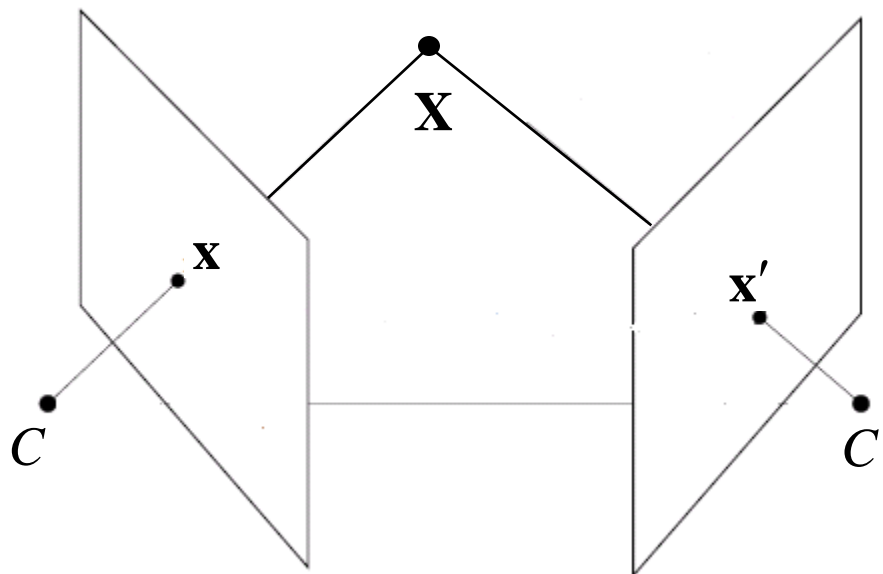
5. Geometrische Relationen zwischen zwei Kameras

5.1 Fragestellungen

Gegeben sind zwei Kameras, welche gemeinsame Raumpunkte abbilden.

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{X}$$



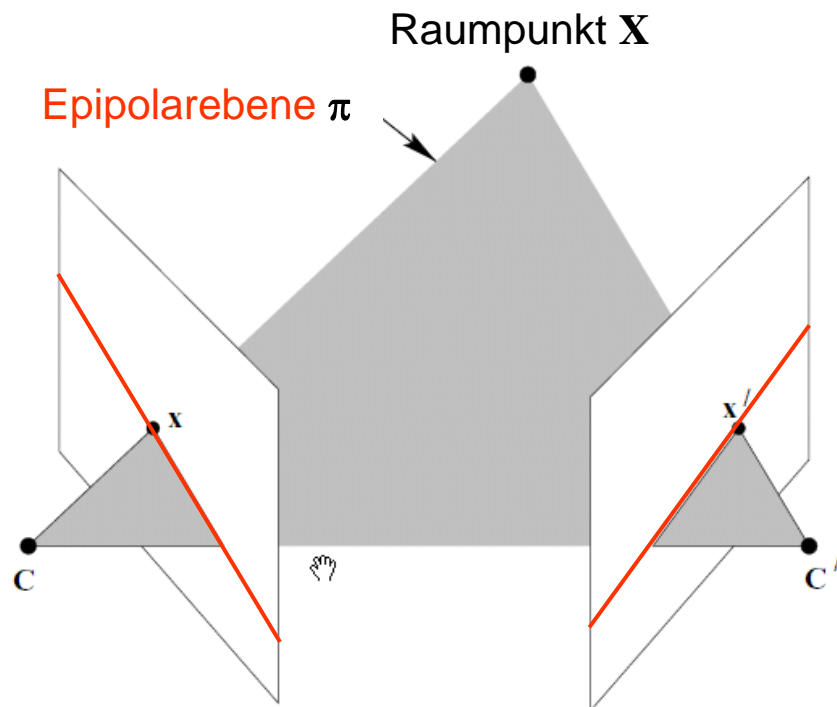
- Gegeben ist ein Bildpunkt \mathbf{x} in der ersten Kameraansicht.
Wo ist der korrespondierende Bildpunkt \mathbf{x}' in der zweiten Ansicht?
- Wie ist die relative Position der Kameras zueinander?
- Wie lassen sich Raumpunkte vermessen?



5.2 Epipolarliniengeometrie

5.2.1 Vorüberlegungen

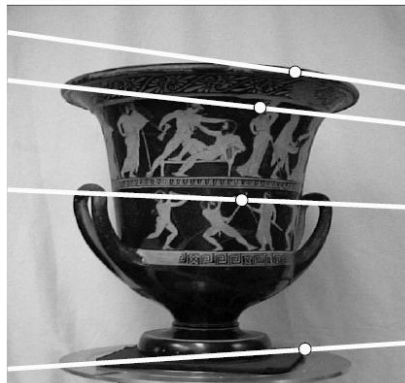
- Die beiden Projektionszentren C und C' , der Raumpunkt X und seine Abbildungen x und x' liegen auf einer Ebene π (\rightarrow *Epipolarebene*).
- Die Schnittlinien der Epipolarebene in den beiden Bildebenen erzeugt die **Epipolarlinien**.

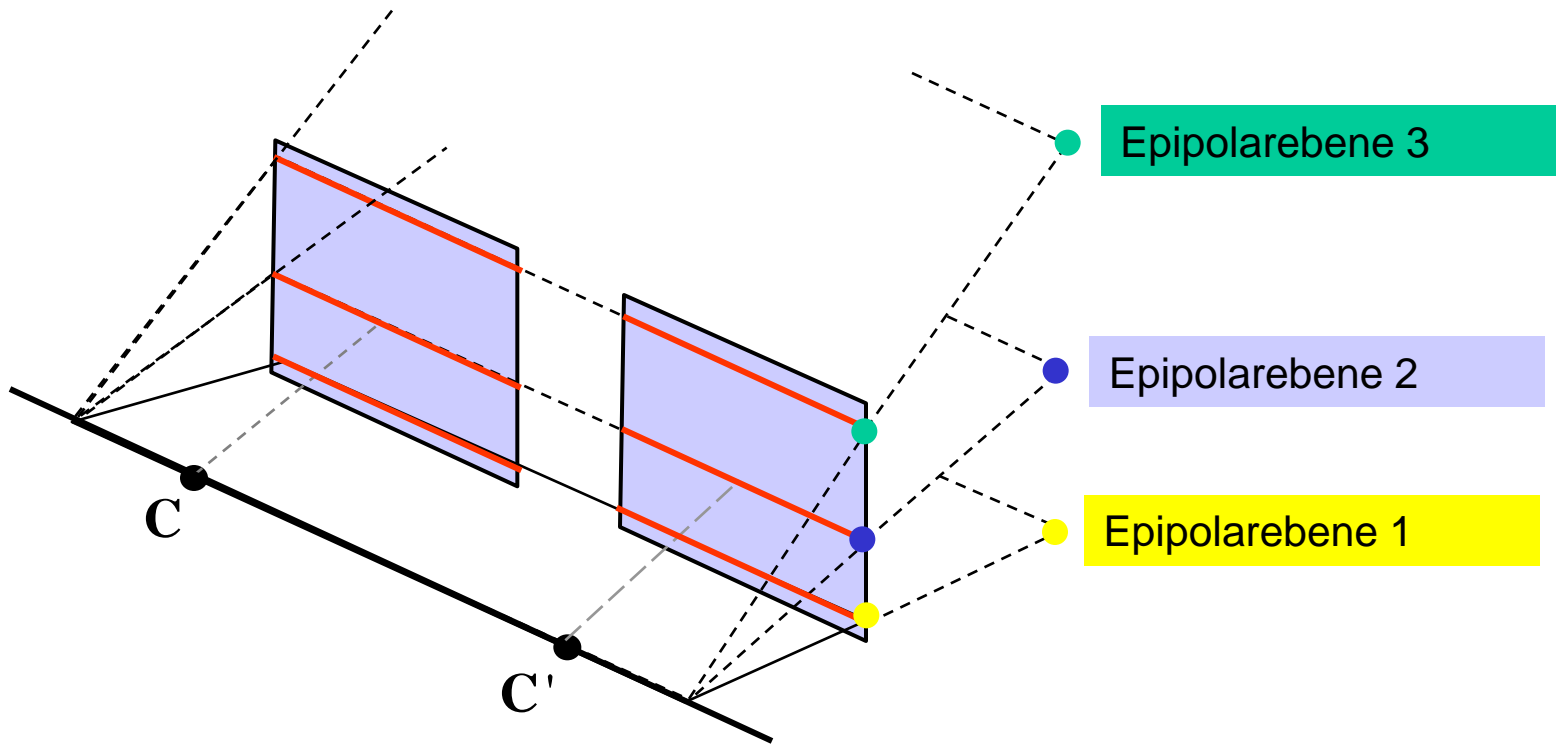


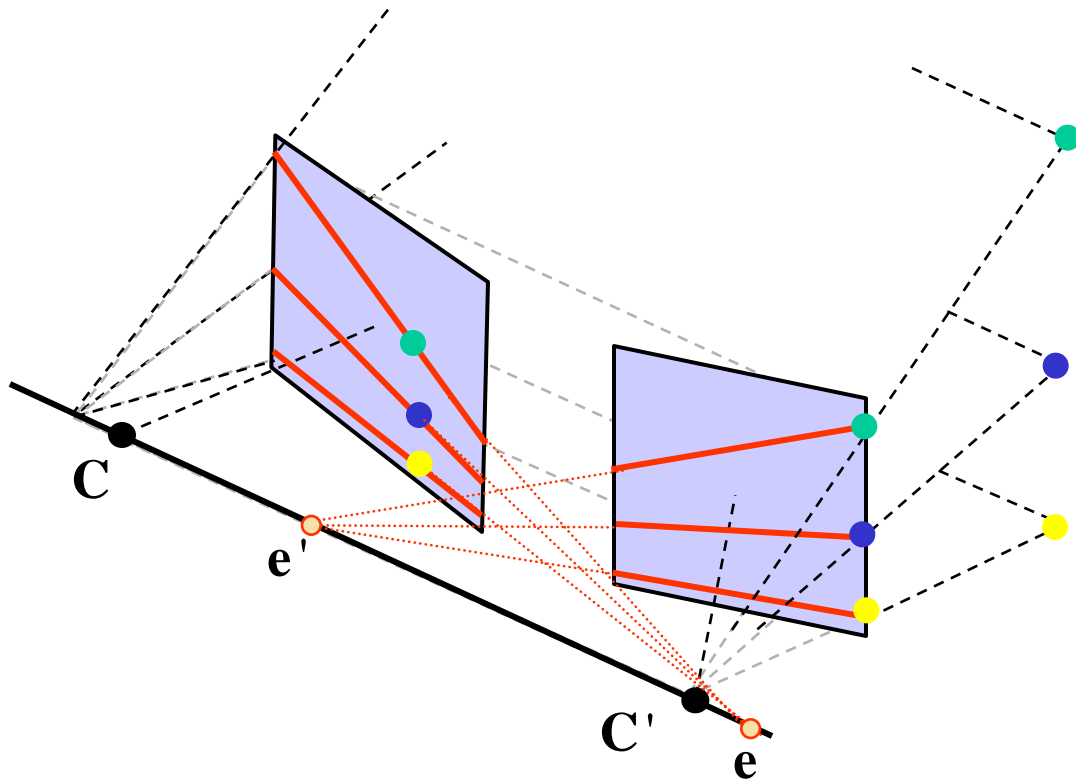


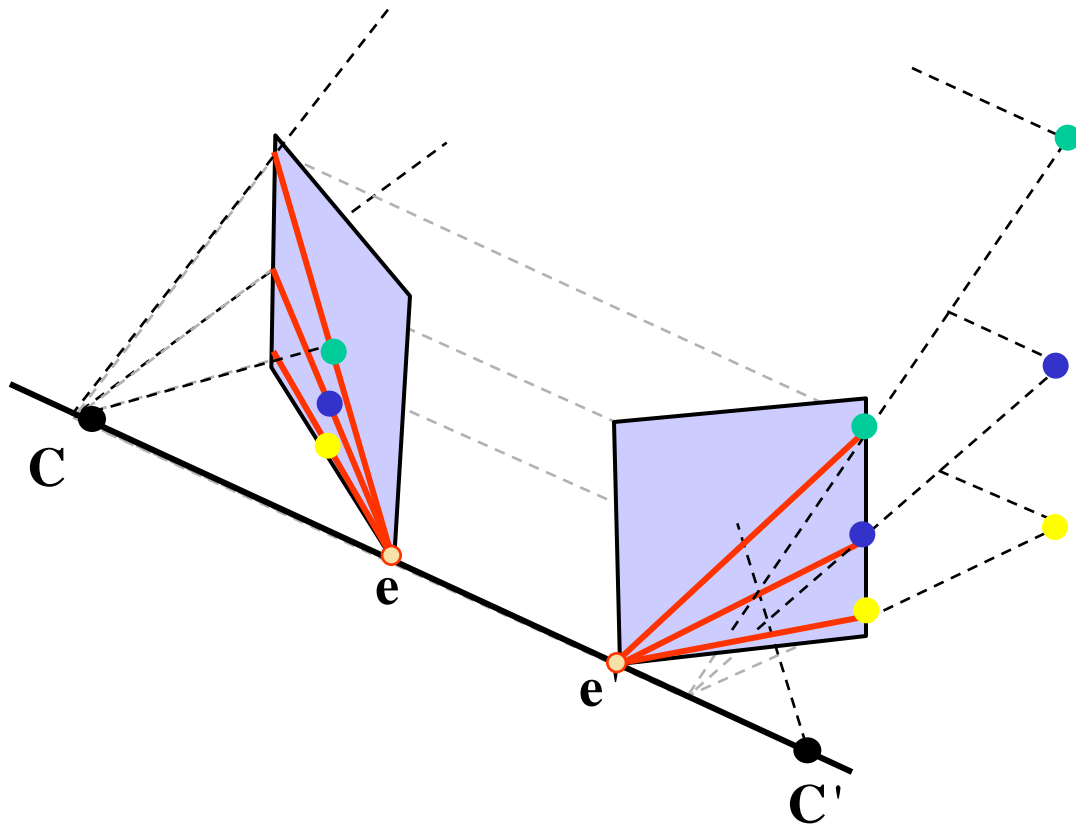
Aussagen über Epipolarebenen und Epipolarlinien (s. Bilder, folgende Seiten)

- Raumpunkte ober- und unterhalb einer Epipolarebene erzeugen andere Epipolarebenen und somit auch andere Epipolarlinien.
- Die Epipolarebenen bilden ein *Ebenenbüschel*, deren gemeinsame Linie die Verbindungslinie der beiden Projektionszentren \mathbf{C} und \mathbf{C}' ist.
- Alle Epipolarlinien schneiden sich in einem Punkt, dem sog. *Epipol* (\mathbf{e} und \mathbf{e}').
- Der Epipol liegt immer auf der Verbindungslinie der beiden Projektionszentren. Er kann auch im Bild liegen, wenn die Verbindungslinie $\mathbf{C} - \mathbf{C}'$ die Bildebene durchstößt.
- Der Epipol ist das Bild des Projektionszentrums der jeweils anderen Ansicht.









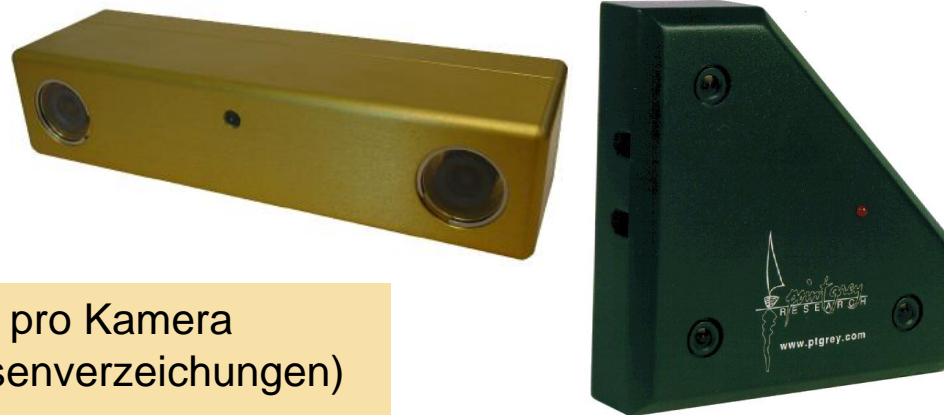


5.2.2 Spezialfälle

5.2.2.1 Mehrbildanordnungen

1. Starre Kameraanordnungen

- feste innere Kameraparameter pro Kamera (Bildweite, Bildhauptpunkt, Linsenverzeichnungen)
- Epipole bekannt und fest



2. Bewegte Kamera

- Blickrichtung senkrecht zur Bewegungsrichtung

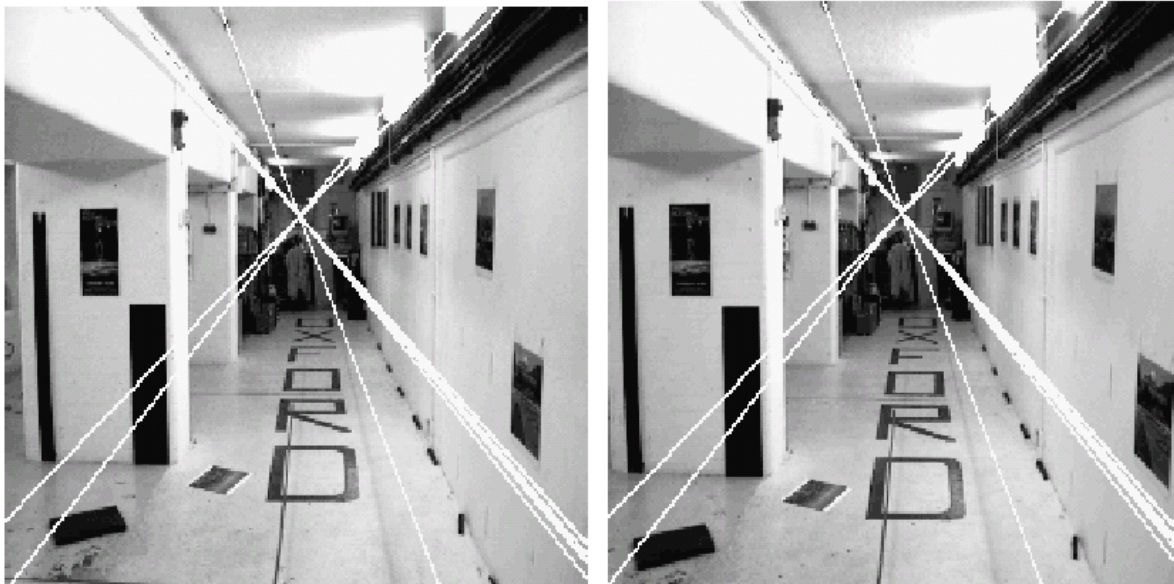
- gleiche innere Kameraparameter
- Epipolarlinien parallel

- Blickrichtung in Bewegungsrichtung

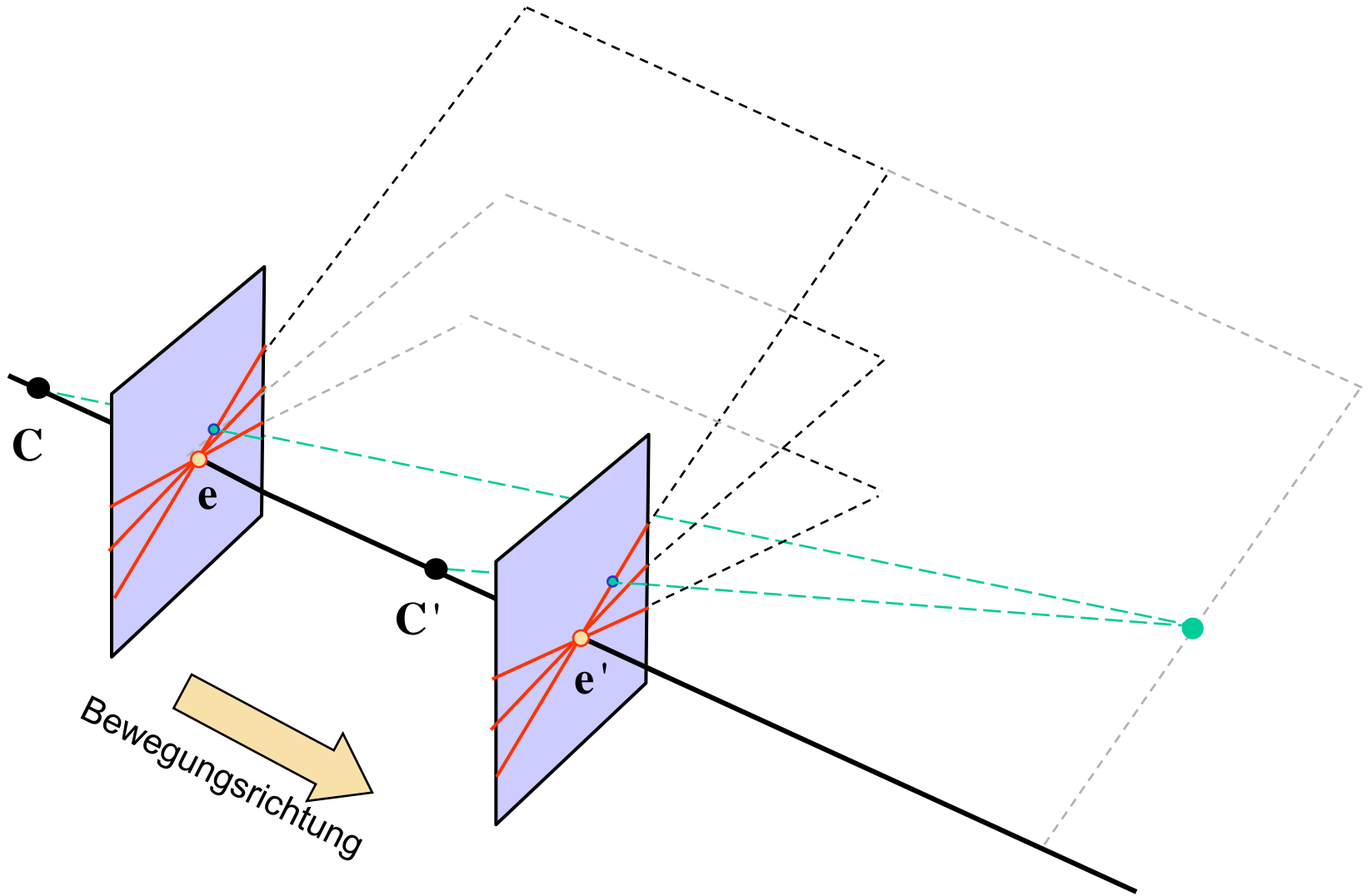
- gleiche innere Kameraparameter
- Epipol liegt im Bild



5.2.2.2 Translation der Kamera bzw. des Objektes (in Blickrichtung)

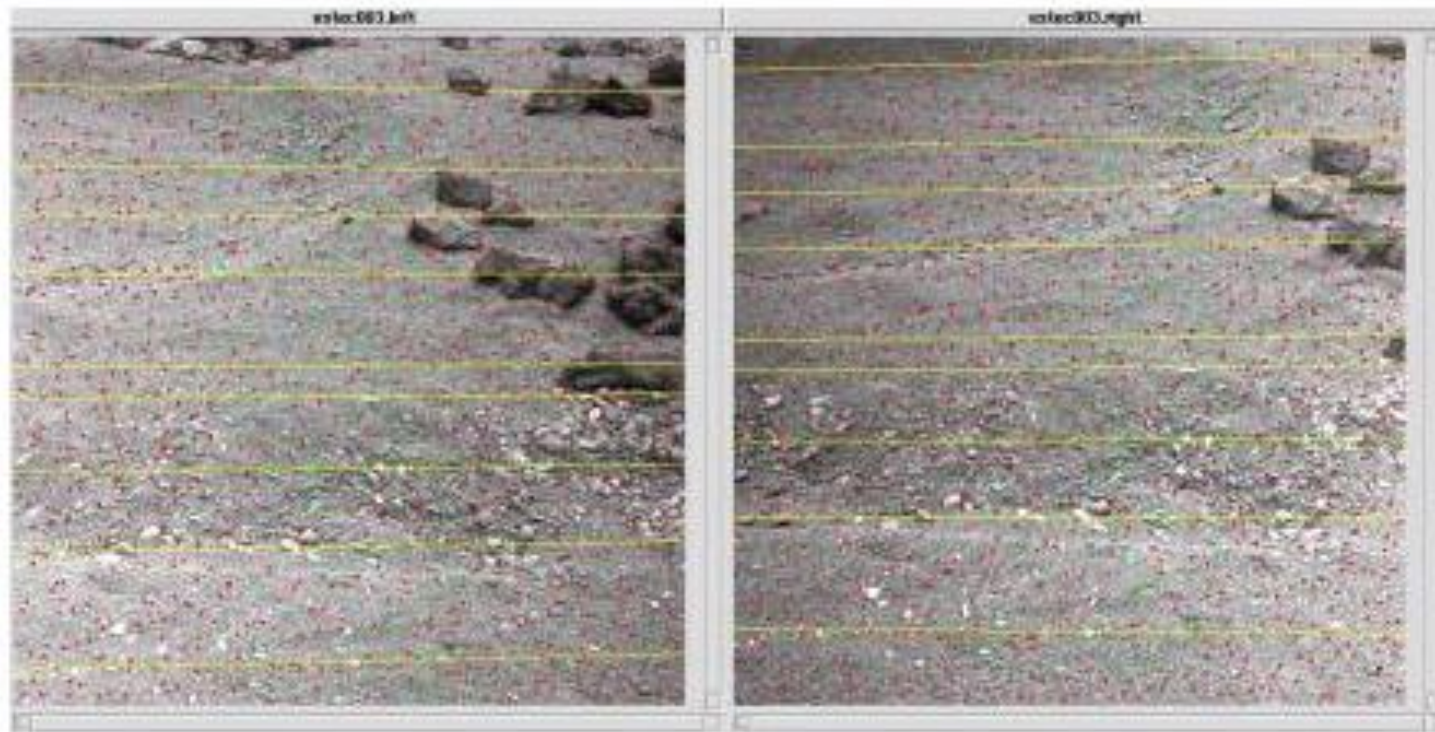


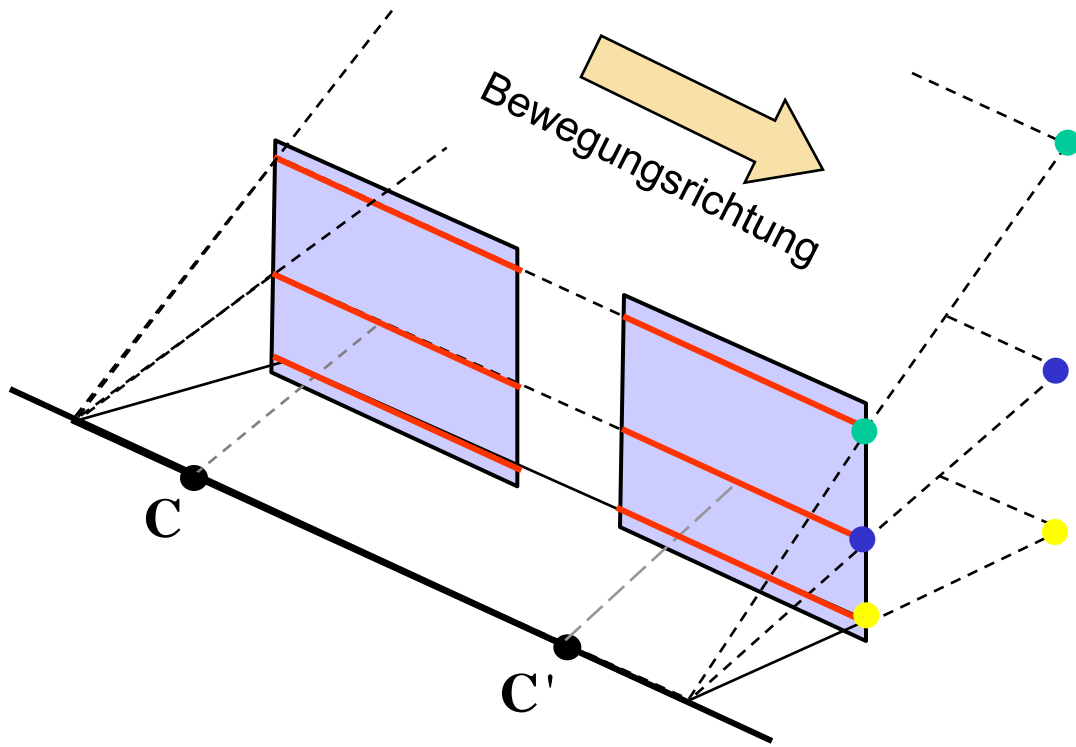
Alle Epipolarlinien zeigen auf den Punkt, auf den sich die Kamera zubewegt (s. Starfield Simulation).





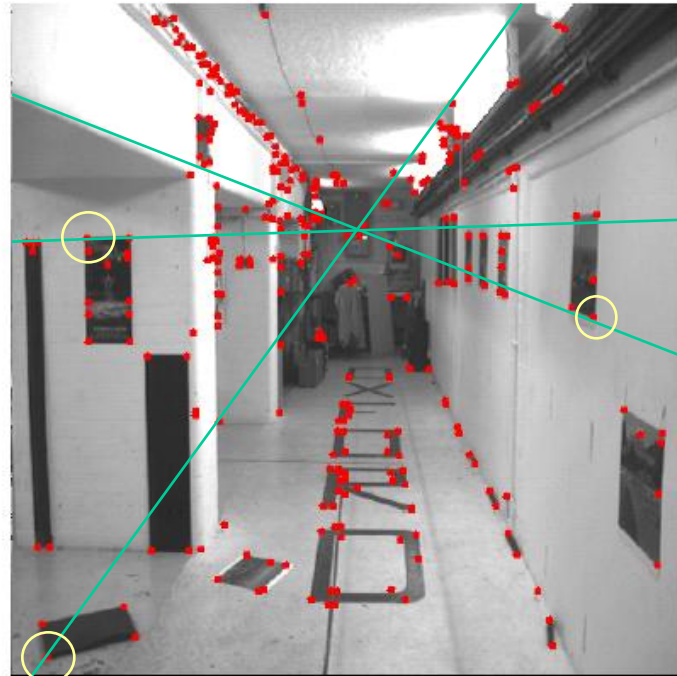
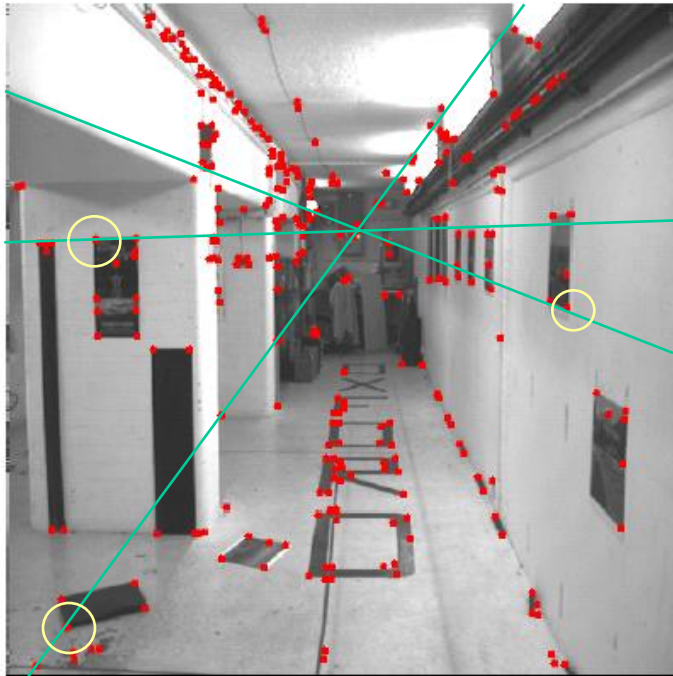
5.2.2.3 Translation der Kamera bzw. des Objektes (orthogonal zu Blickrichtung)

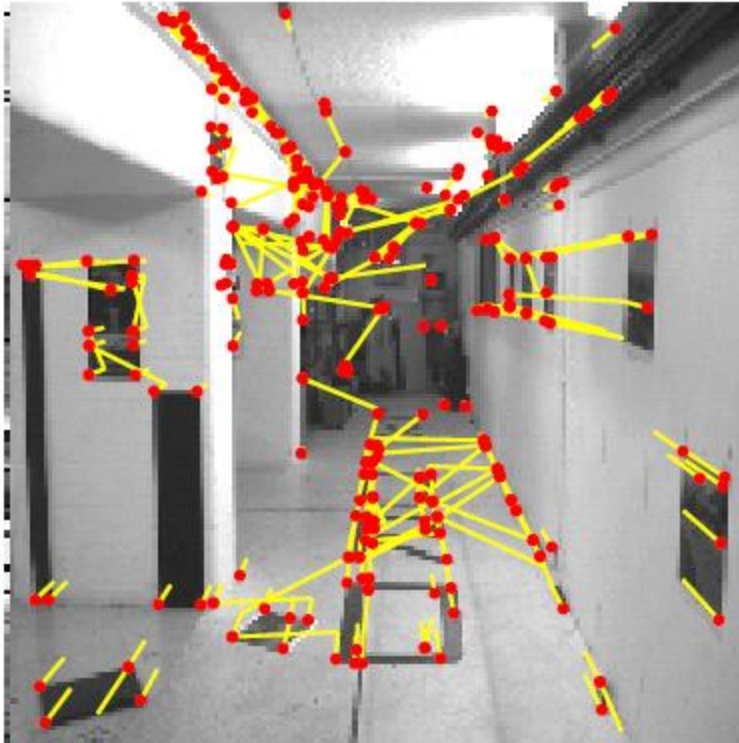




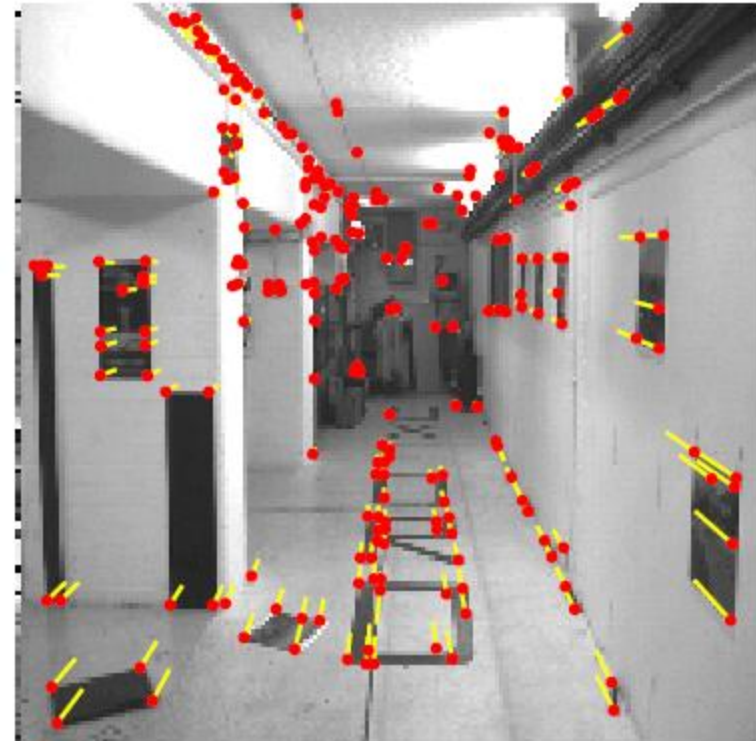
5.2.3 Anwendung der Epipolarlinien

Die Suche korrespondierender Bildpunkte auf Epipolarlinien senkt erheblich mögliche Zuordnungsfehler.





Berechnete Punktbewegungen durch Vergleich der Punktumgebungen.



Berechnete Punktbewegungen bei Berücksichtigung der Epipolarlinien.



5.2.4 Fundamentalmatrix (spiegelt die Anordnung zweier Kameras wider)

Gegeben sind: - 2 korrespondierende Bildpunkte \mathbf{x} und \mathbf{x}' sowie
- die Epipolarlinie \mathbf{l}'

Es gibt eine Matrix \mathbf{F} mit der Eigenschaft
(\rightarrow Fundamentalmatrix)

$$\mathbf{l}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

bzw.

$$\mathbf{l} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{x}'$$

(1)

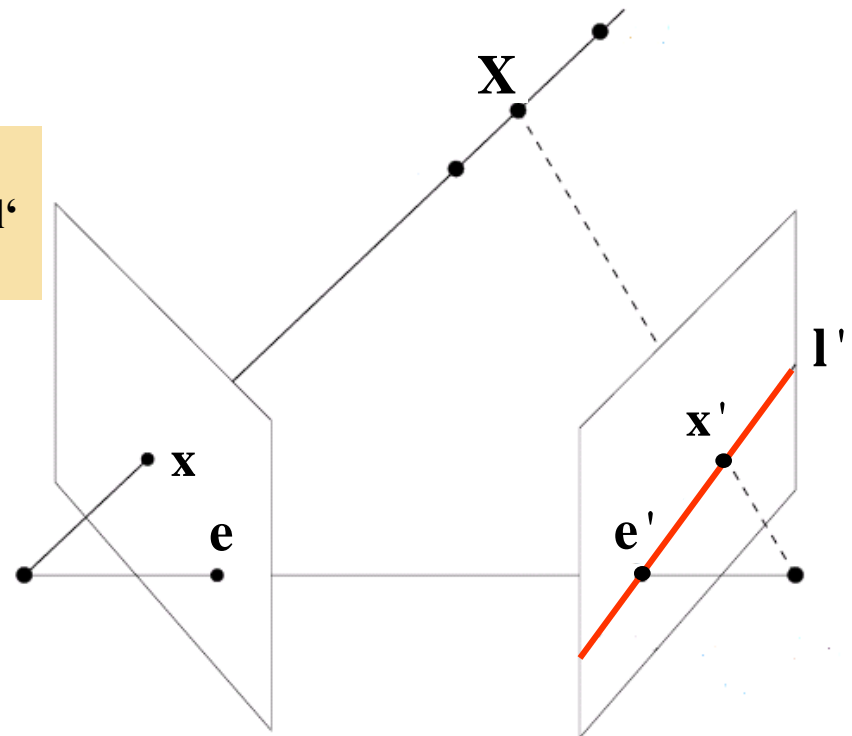
Ist die Fundamentalmatrix bekannt, dann kann zu einem Bildpunkt \mathbf{x} die Epipolarlinie \mathbf{l}' in der zweiten Ansicht berechnet werden.

Eigenschaften von \mathbf{F} :

- homogene 3x3-Matrix

$$\mathbf{F} : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$$

- Rang 2





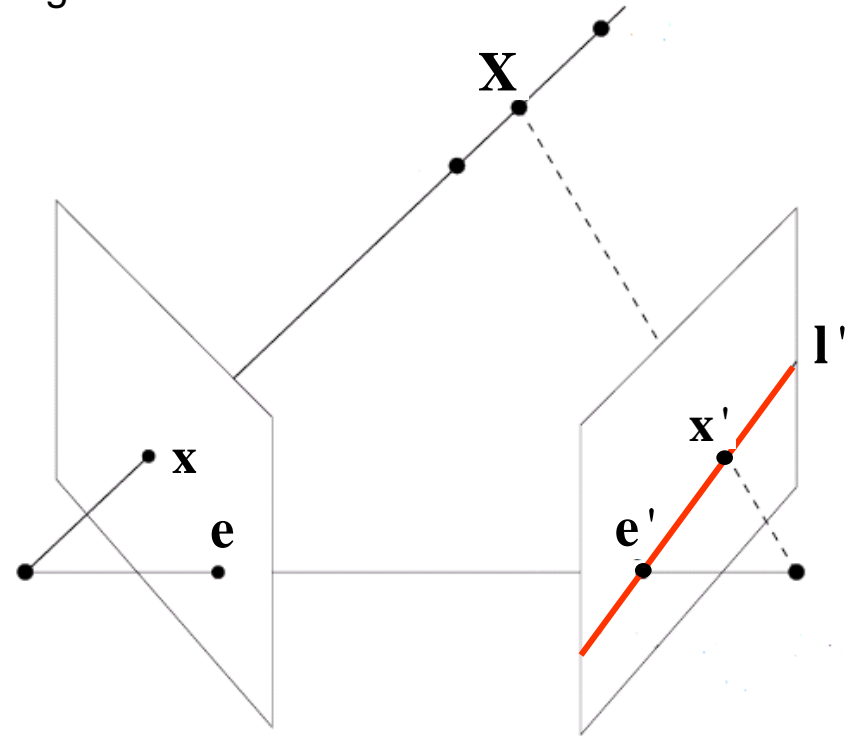
Der Punkt \mathbf{x}' liegt auf der Epipolarlinie \mathbf{l}' . Daher gilt $\mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{l}' = 0$ (2)

Durch Einsetzen von $\mathbf{l}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$ (1) in (2) folgt daraus



$$\mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = 0$$

Hiermit kann die Fundamentalmatrix mit (mind.) 8 korrespondierenden Punkten durch ein lin. Gleichungssystem bestimmt werden.



Die Bestimmung der Epipolarlinien ist auch mit unkalibrierten Kameras möglich. Es wird lediglich die Fundamentalmatrix \mathbf{F} benötigt.



5.2.5 Berechnung von F aus korrespondierenden Bildpunkten

5.2.5.1 Aufgabenstellung

Gegeben:

- 2 unkalibrierte Bilder
- markante Punkte in den Bildern
- mind. 8 korrespondierende Punktpaare



Gesucht:

- Fundamentalmatrix F
- und damit die Epipolarlinien l' zu allen Punkten x



5.2.5.2 Lösungsansatz

$$\mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = 0$$

$$\underbrace{(x', y', 1)}_{[1,3]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}}_{[3,3]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{[3,1]} = 0$$

Damit kann für jedes korrespondierende Punktpaar eine Gleichung aufgestellt werden:

$$x'x f_{11} + x'y f_{12} + x' f_{13} + y'x f_{21} + y'y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0$$

Oder kürzer:

$$(x'x, x'y, x', y'x, y'y, y', x, y, 1) \cdot \mathbf{f} = 0$$

$$\text{mit } \mathbf{f} = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$$



Mit n korrespondierenden Punkten erhält man das folgende lineare, homogene Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x'_2 x_2 & x'_2 y_2 & x'_2 & y'_2 x_2 & y'_2 y_2 & y'_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{f} = 0$$

Das Gleichungssystem kann bis auf einen Skalierungsfaktor berechnet werden.

Numerisch müssen bei der Lösung einige Randbedingungen beachtet werden:

- Rang-2-Bedingung der F-Matrix
- System ist schlecht konditioniert

In der Literatur sind geeignete Verfahren zur Lösung beschrieben (Singuläre-Werte-Zerlegung, Normalisierung,...).



5.2.5.3 Automatisierter Ansatz zur Bestimmung der F-Matrix (RANSAC-Verfahren)

Wie können korrespondierende Punkte gefunden werden, um die Fundamentalmatrix zu berechnen?

1. Suche nach markanten Punkten in beiden Bildern.
2. Korrespondenzhypothesen aufstellen durch lokalen Ähnlichkeitsvergleich (Kreuzkorrelation, SSD,...).
3. **Repeat** (bis gute F-Matrix gefunden)
4. 8 mögliche Korrespondenzen auswählen
5. F berechnen
6. Prüfe mit den vermuteten Epipolarlinien die Zahl der übereinstimmenden Zuordnungen
7. F erneut berechnen, jetzt aber mit allen über Epipolarlinien gefundenen Korrespondenzen
8. Mit Hilfe der Epipolarlinien weitere Punktkorrespondenzen suchen

RANSAC = Random Sample Consensus

→ Verfahren zur bestmöglichstn Einpassung von Modellen in Datenmengen (Messwerte)





5.2.6 Berechnung von F im Falle bereits kalibrierter Kameras

5.2.6.1 Aufgabenstellung

Gegeben:

- 2 kalibrierte Kameras (P und P' sind bekannt)
(auf ein Weltkoordinatensystem kalibriert)



Gesucht:

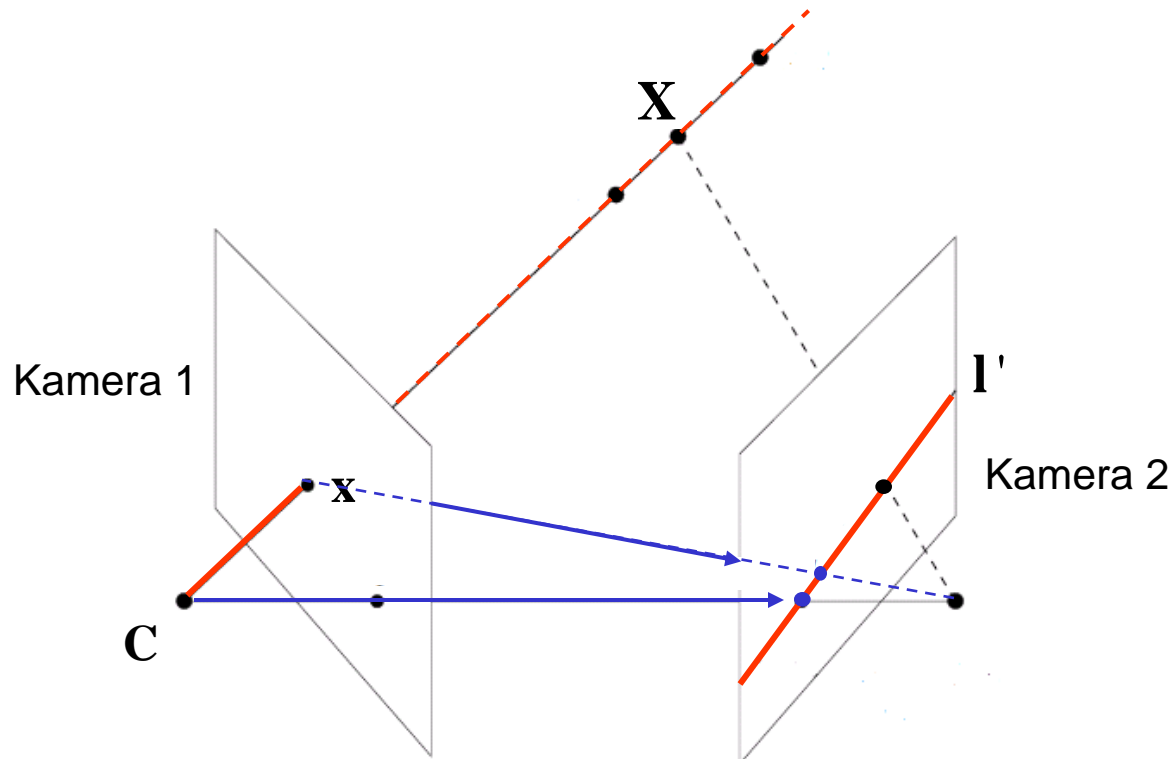
- Fundamentalmatrix F
- und damit die Epipolarlinien l' zu allen Punkten x



5.2.6.2 Lösungsansatz

Der Bildpunkt \mathbf{x} und das Projektionszentrum \mathbf{C} bilden eine Gerade, auf der der abgebildete Raumpunkt liegt.

Werden diese beiden Punkte in das Bild der 2. Kamera projiziert (rechnerisch), hat man 2 Punkte auf der Epipolarlinie \mathbf{l}' und kann damit die Epipolarlinie angeben.





Math. Realisierung des Ansatzes

Ausgangspunkt ist die Projektionsgleichung von Kamera 1: $\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}$

1. Bestimmung der Raumkoordinaten (\mathbf{X}_x) des Bildpunktes x mit Hilfe der Pseudoinversen (\mathbf{P} ist eine 3x4-Matrix):

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{x} = \mathbf{P}^T \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}$$

$$(\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{x} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{P}^T \mathbf{P}) \cdot \mathbf{X}$$

$$\underbrace{(\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T}_{\text{Pseudoinverse } \mathbf{P}^\dagger} \mathbf{x} = \mathbf{X} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{P}^\dagger \cdot \mathbf{x} = \mathbf{X}_x$$

Bildpunkt x in
Bildkoordinaten

Raumkoordinaten des
Bildpunktes x



Damit können die Bildkoordinaten für \mathbf{x} und \mathbf{C} in Kamera 2 angegeben werden:

2. Projektion des Bildpunktes \mathbf{x} in das Bild von Kamera 2

$$\mathbf{x}'_x = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{X}_x = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^\dagger \cdot \mathbf{x}$$

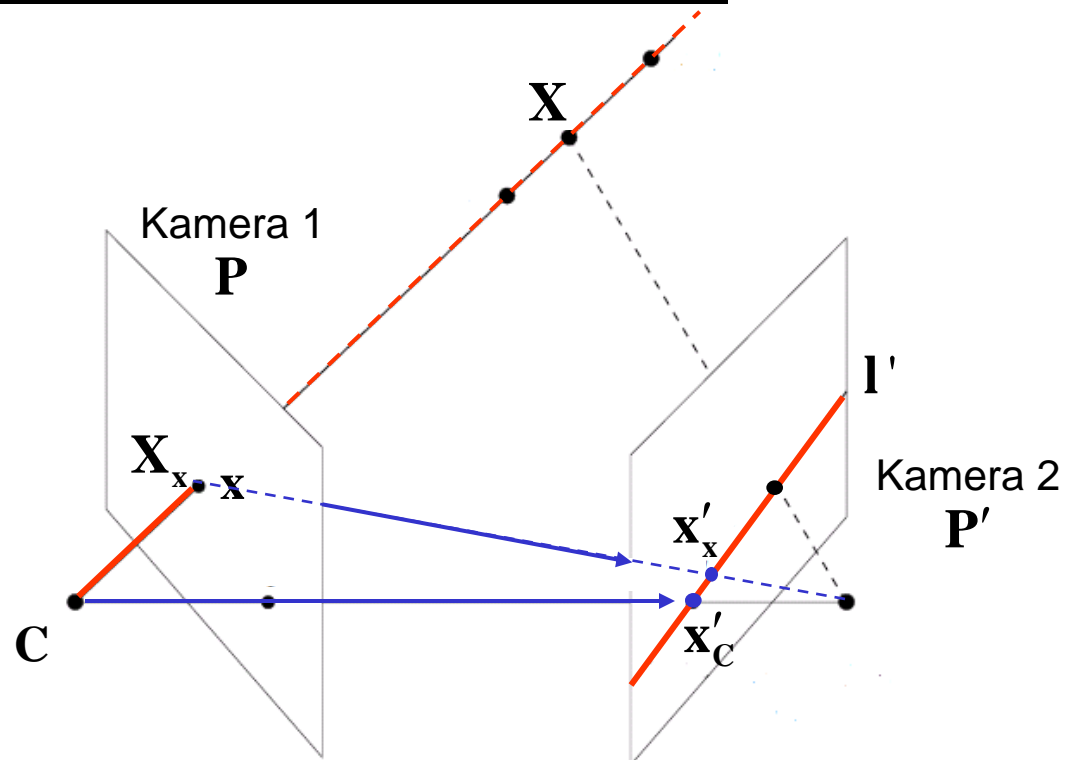
3. Projektion des Projektionszentrums \mathbf{C} in das Bild von Kamera 2

$$\mathbf{x}'_C = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{x}'_C = \mathbf{e}'$$

Anm.:

Das Bild des Projektionszentrums \mathbf{C} in Ansicht 2 ist der Epipol \mathbf{e}' .





Jetzt muss mit den beiden Punkten noch die Epipolarlinie berechnet werden.

$$\mathbf{x}'_x = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^\dagger \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{x}'_c = \mathbf{e}'$$

Für eine Gerade in der Ebene durch zwei Punkte gilt: $\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{x}'_x$

Kreuzprodukt ersetzen durch das Skalarprodukt: $\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{x}'_x = [\mathbf{e}']_x \cdot \mathbf{x}'$

Damit ist die Lösung gefunden:

$$\mathbf{l}' = [\mathbf{e}']_x \cdot \mathbf{x}'_x = [\mathbf{e}']_x \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^\dagger \cdot \mathbf{x}$$

Mit $\mathbf{l}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$ gilt somit

Sind die Projektionsmatrizen der beiden Kameras bekannt, kann die Fundamentalmatrix direkt angegeben werden :

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_x \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^\dagger$$



5.3 Raumpunktbestimmung

5.3.1 *Bei bekannten Projektionsmatrizen*

folgt später



5.3.2 *Bei bekannter Fundamentalmatrix*

folgt später



Projektvorschläge

Realtime-Multiline-Lichtschnittsensor zur Hindernisdetektion/-identifikation

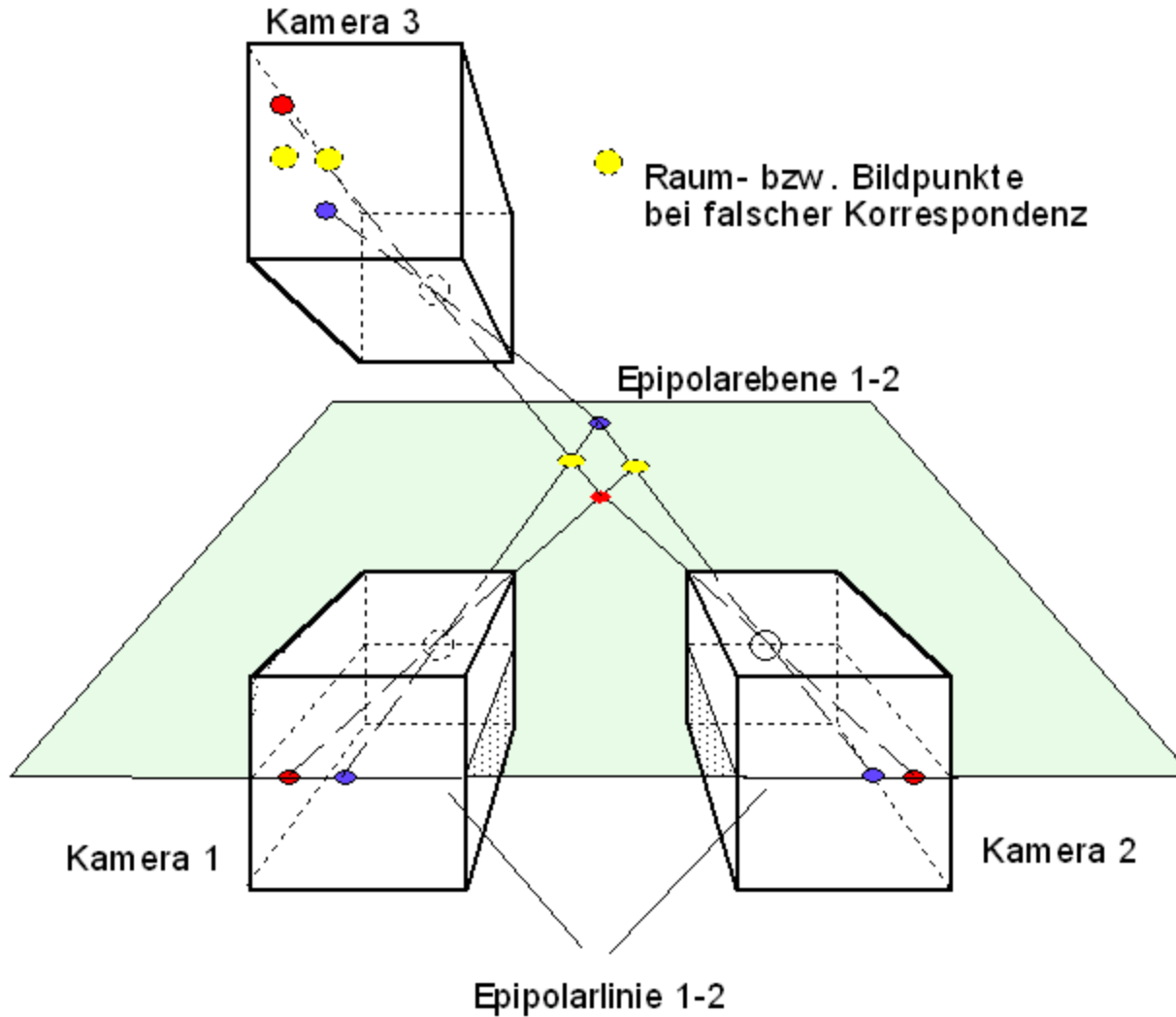
Trifokalsensor zur Hindernisdetektion (→ Tiefenbilder)

3D-Umgebungsmodell anhand einer bewegten Kamera

Präzisionsnavigation mit Stereokamera und kodierten Passpunkten

Realtime-Object-Tracking

Trifokalsensor (3-Kamera-Methode zur Korrespondenzauflösung)





Beispiel: 3D-Umgebungsmodell anhand einer bewegten Kamera



siehe z.B.

Multiple View Geometry

Richard Hartley and Andrew Zisserman

CVPR June 1999

