3D-Bildverarbeitung
--- Mathematische Grundlagen ---

Prof. Dr.-Ing. Andreas Meisel

1. Vektoren

1.1 Begriffseinführung

Vektor : Zusammenfassung von Zahlen

- in einer Zeile (*Zeilenvektor*) oder
- in einer Spalte (*Spaltenvektor*).

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Transponierte eines Vektors :

- aus Zeilenvektor wird Spaltenvektor
- aus Spaltenvektor wird Zeilenvektor

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n) \Longleftrightarrow \mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

<u>Interpretation als Verschiebung im Raum (*freier Vektor*)</u>:

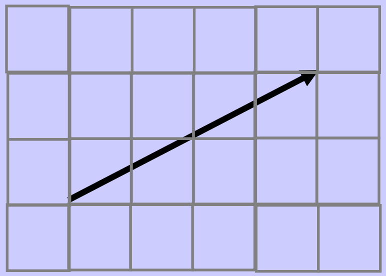
- Richtung und Länge einer <u>Verschiebung</u>
- Die Komponenten geben an, aus welchen Basisverschiebungen sich die Bewegung zusammensetzt.

<u>Interpretation als Punkt (= *Ortsvektor*)</u>:

- <u>Lage eines Punktes</u> in einem Koordinatensystem
- Die Koordinaten geben an, wie weit der Punkt vom Ursprung aus in Richtung der Koordinatenachsen verschoben ist.

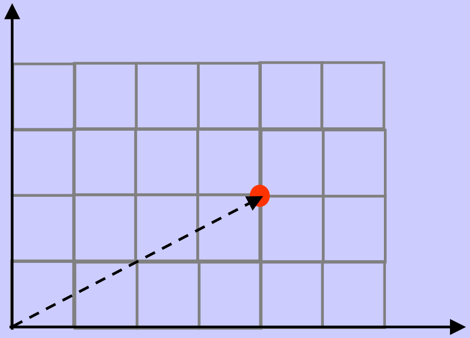
Beispiel: 2-dimens. freier Vektor
→ Verschiebungsvektor

$$\mathbf{v} = \left(4,\ 2\right)$$



Beispiel: 2-dimensionaler Punkt
→ Ortsvektor

$$\mathbf{v} = \left(4,\ 2\right)$$



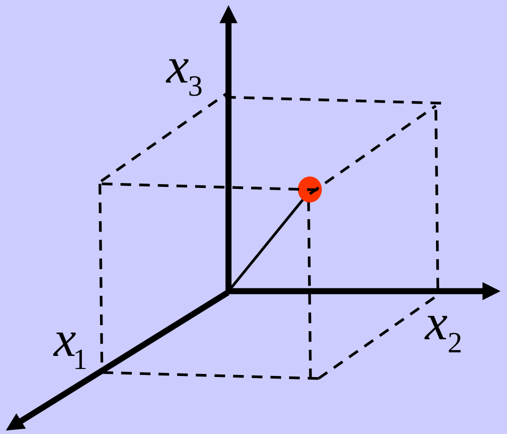
1.2 Punkt in euklidischen Koordinaten

Jeder n-dimensionale Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ wird durch n Koordinaten beschrieben.

Im Rahmen der Vorlesung werden Punkte durch Spaltenvektoren beschrieben.

Beispiel: Ein Punkt im 3-dimensionalen euklidischen Raum wird beschrieben durch einen Spaltenvektor mit 3 Koordinaten.

$$\mathbf{p} = (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



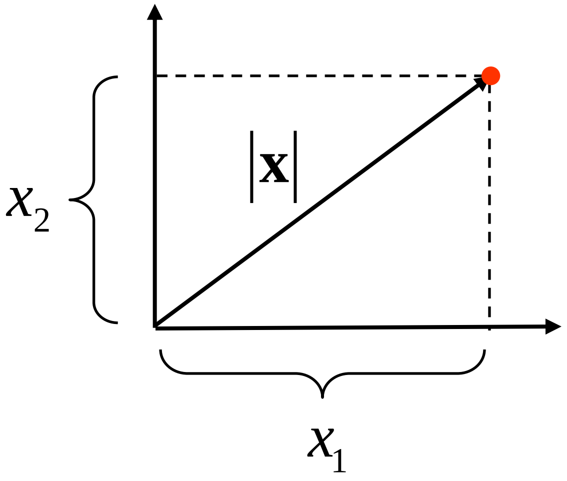
1.3 Vektorbetrag und Einsvektor

1.3.1 Vektorbetrag = Länge

Math. Beschreibung des *Vektorbetrages*

=
- Länge des Vektors
- Abstand eines Punktes vom Ursprung

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots . x_n^2}$$



Beispiel: $\mathbf{x} = (2,\ 4,\ 4)^T$

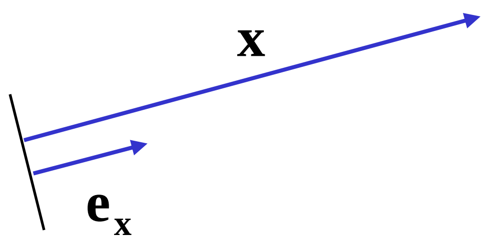
$$|\mathbf{x}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

1.3.2 Einheitsvektor

Teilt man einen Vektor $\mathbf{x}$ durch seinen Betrag $|x|$, so erhält man den *Einheitsvektor* $\mathbf{e_x}$:

$$\boxed{\mathbf{e_x} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}} \qquad \boxed{|\mathbf{e_x}| = 1}$$

Der Einsvektor $\mathbf{e_x}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\mathbf{x}$ und die Länge 1 .



$$\boxed{\mathbf{x} = |\mathbf{x}| \cdot \mathbf{e_x}}$$

<u>**Beispiel:**</u>

$$\mathbf{x} = (2,\ 4,\ 4)^T \qquad |\mathbf{x}| = 6$$

$$\mathbf{e}_x = \left(\tfrac{2}{6},\ \tfrac{4}{6},\ \tfrac{4}{6}\right)^T = \left(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{3}\right)^T$$

1.4 Vektoroperationen

1.4.1 Addition und Subtraktion

Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots . y_n)^T$

Dann gilt für die Summme $\boxed{\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}}$

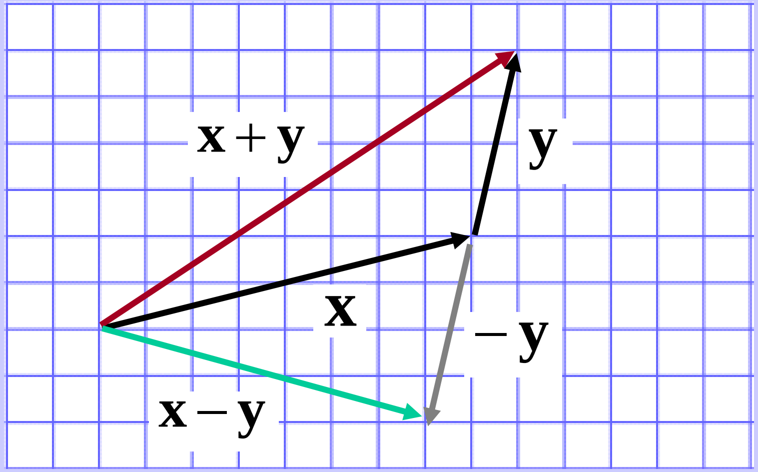
<u>Beispiel:</u>

$$\mathbf{x} = (8,\ 2)^T$$

$$\mathbf{y} = (1,\ 4)^T$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (9,\ 6)^T$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (7,\ -2)^T$$



Anwendung : Abstand zweier Punkte

Mit $$\mathbf{x}-\mathbf{y} = \left(x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ \ldots.\ x_n - y_n\right)^T$$

ist der Betrag $$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots\ldots(x_n-y_n)^2}$$

Aus der Anschauung folgt:

Der Abstand zweier Punkte ist gleich dem Betrag des Differenzvektors $\boxed{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$.

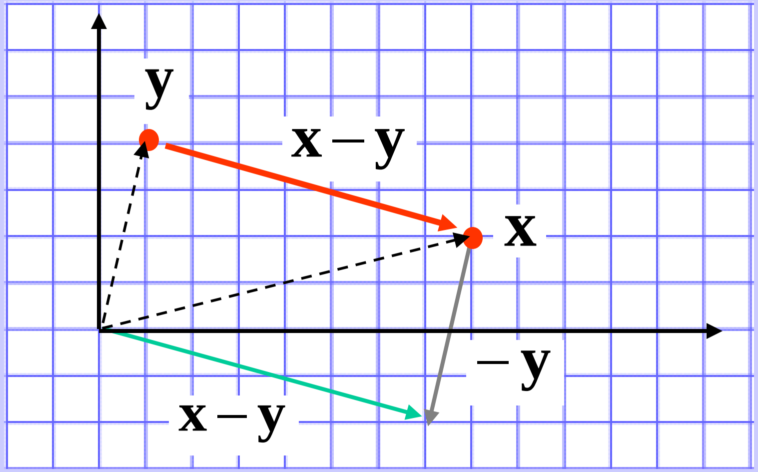
Beispiel:

$$\mathbf{x} = (8,\ 2)^T$$

$$\mathbf{y} = (1,\ 4)^T$$

$$\mathbf{x}-\mathbf{y} = (7,\ -2)^T$$

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = 7.28$$



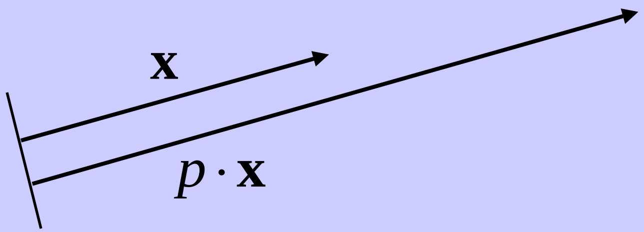
1.4.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

p sei ein Skalar (z.B. eine reelle Zahl).

Das Produkt $p \cdot \mathbf{x}$
ist ein Vektor der Länge $p \cdot |\mathbf{x}|$
und der gleichen Richtung wie $\mathbf{x}$:

$$\boxed{p \cdot \mathbf{x} = p \cdot |\mathbf{x}| \cdot e_{\mathbf{x}}}$$

Beispiel: $p = 2$



1.4.3 Skalarprodukt zweier Vektoren (inneres Produkt)

Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots . y_n)^T$

Das Skalarprodukt ist definiert als $\boxed{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots . . x_n \cdot y_n}$

Das Ergebnis des Skalarproduktes ist ein **Skalar** !

Beispiel: $\mathbf{x} = (8,\ 2)^T$ $\mathbf{y} = (1,\ 4)^T$

$$\underline{\underline{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}}} = (8,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$$

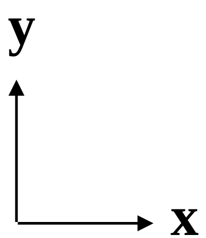
Beispiel: Beschreibung des Vektorbetrages mit Hilfe des Skalarproduktes

$$|\,\mathbf{x}\,| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots . x_n^2}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren entspricht dem Produkt der Vektorlängen multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels α.

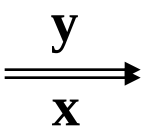
$$\boxed{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \quad = \; |\,\mathbf{x}\,| \cdot |\,\mathbf{y}\,| \cdot \cos(\alpha)}$$

Sonderfall: Vektoren sind *senkrecht* zueinander



$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \;=\; 0$$

Sonderfall: Vektoren sind *parallel* zueinander

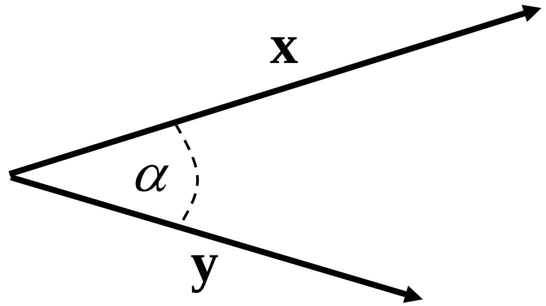


$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \;=\; |\,\mathbf{x}\,| \cdot |\,\mathbf{y}\,|$$

Anwendung : Winkel zwischen zwei Vektoren

Mit $$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cdot \cos(\alpha)$$

ist der Winkel $$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}}$$



1.4.4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt) Anm.: für 3-dimensionale Vektoren

Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$

Das Kreuzprodukt ist definiert als

$$\boxed{\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}}$$

Das Ergebnis des Kreuzproduktes ist ein **Vektor** !

Beispiel:

$$\mathbf{x} = (8,\ 2,\ 0)^T$$
$$\mathbf{y} = (0,\ 1,\ 4)^T$$

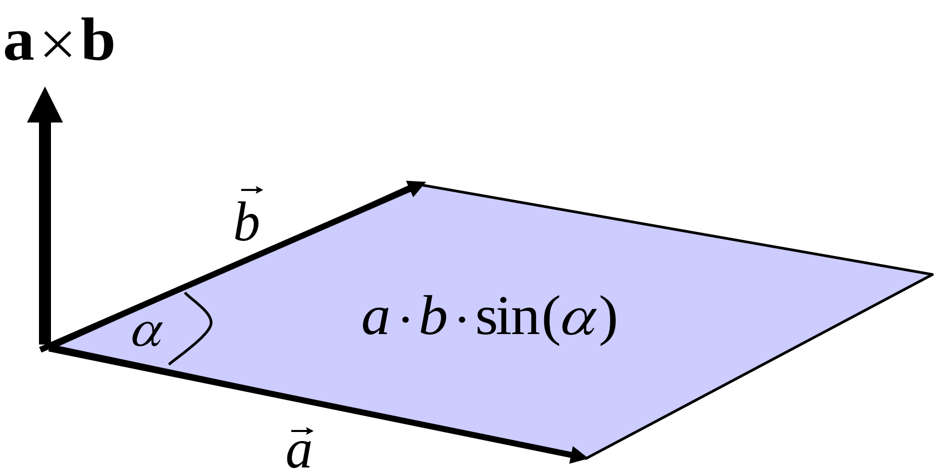
$$\underline{\underline{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 8 \cdot 4 \\ 8 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \\ -32 \\ 8 \end{pmatrix}}}$$

geometrische Bedeutung des Kreuzproduktes

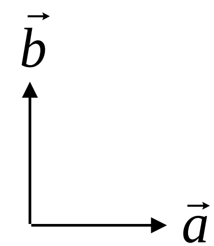
Der Ergebnisvektor steht senkrecht auf der durch die Eingangsvektoren aufgespannten Ebene.

Seine Länge entspricht dem Produkt der Längen der Eingangsvektoren multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels α.

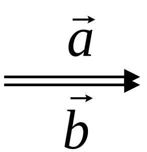
$$\boxed{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\alpha)}$$



Sonderfälle:

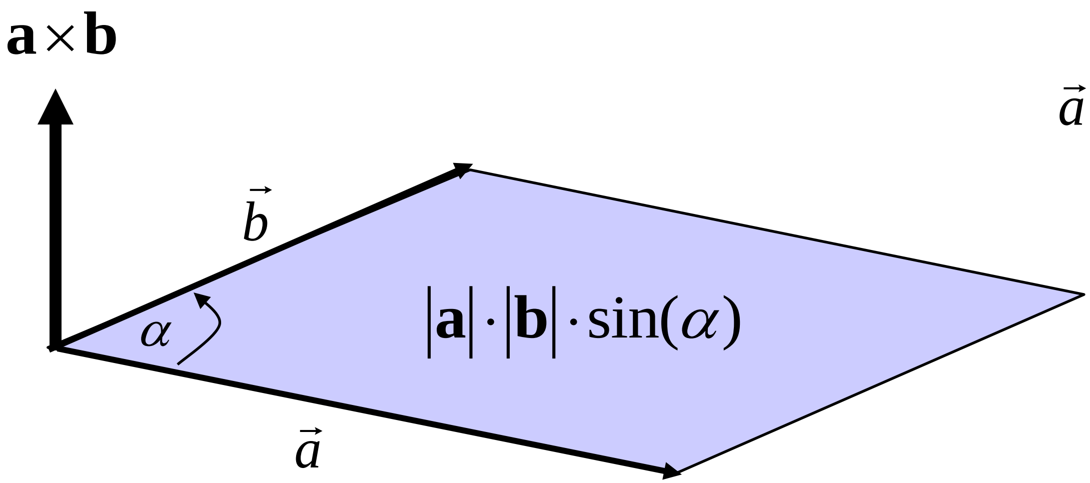


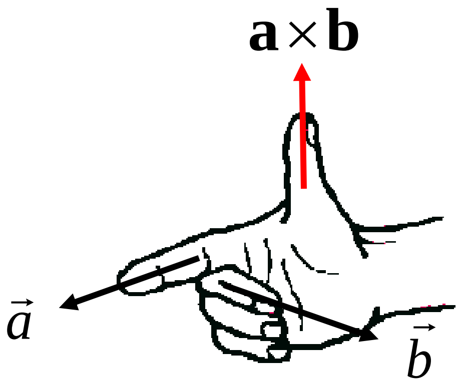
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$$

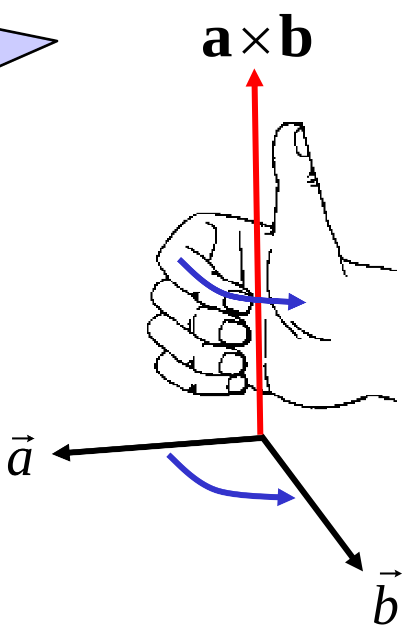


$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 0$$

zur Richtung des Ergebnisvektors (Rechte-Hand-Regel)







Ersetzten des Kreuzproduktes durch ein Matrixprodukt

Gegeben sei das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Durch Umwandlung des **a**-Vektors in eine schiefsymmetrische Matrix der Form

$$\boxed{[\mathbf{a}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}}$$

kann das Vektorprodukt durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation ersetzt werden:

$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \;=\; [\mathbf{a}]_x \cdot \mathbf{b}}$$

ÜBUNG: Vektorprodukte

Gegeben sind zwei Vektoren: $\mathbf{x} = (1,\ 1,\ 2)^T$ $\mathbf{y} = (2,\ 1,\ 3)^T$

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt.

b) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren ?

c) Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\mathbf{z}$.

d) Zeigen Sie, dass das $\mathbf{z}$ senkrecht auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ steht.

1.5 Beziehungen zwischen Vektoren

1.5.1 Lineare Abhängigkeit zweier Vektoren

Zwei Vektoren **a** und **b** sind genau dann *linear abhängig*, wenn sie parallel zueinander sind, d.h. wenn gilt $\mathbf{a} = p \cdot \mathbf{b} \qquad p \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

Beispiel: $\mathbf{a} = (3,\ 7, 4)^T \qquad \mathbf{b} = (9,\ 21,\ 12)^T$

Es gilt $\mathbf{b} = 3 \cdot \mathbf{a}$ → $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind lin. abhängig.

alternativ für
3-dim.-Vektoren: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ → $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind lin. abhängig.

1.5.2 Lineare Unabhängigkeit mehrerer Vektoren

Eine Menge von Vektoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ist *linear unabhängig*, wenn kein Vektor als Linearkombination der anderen beschrieben werden kann.

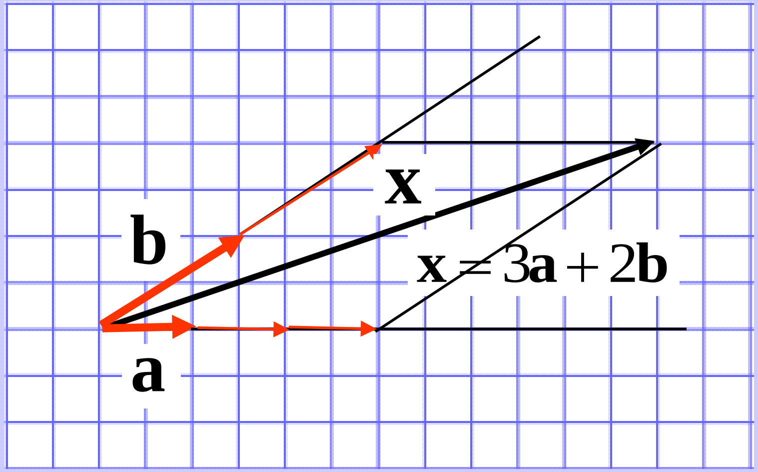
Anm.: In der Ebene sind höchstens 2 Vektoren lin. unabhängig

Im 3-dimens. Raum sind höchstens 3 Vektoren lin. unabhängig.

Beispiel:

Jeder Vektor $\mathbf{x}$ lässt sich durch die linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ beschreiben.

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \cdot \mathbf{a} + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}$$



2. Matrizen

2.1 Begriffseinführung

Eine Matrix ist ein rechteckförmiges Zahlenschema aus <u>n Zeilen</u> und <u>m Spalten</u>.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

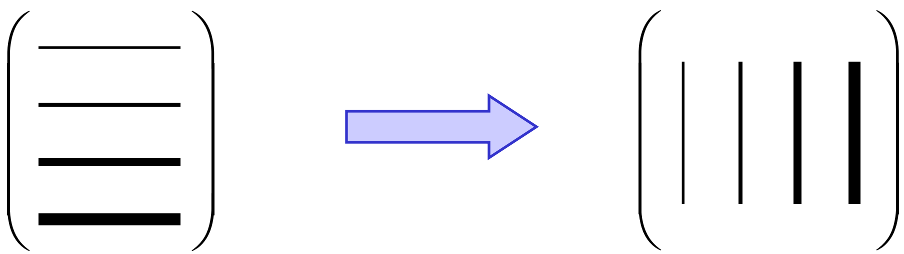
Typ: (n,m) - Matrix

2.2 Spezielle Matrizen

2.2.1 Transponierte einer Matrix

Man erhält die Transponierte einer Matrix, indem man Spalten und Zeilen vertauscht.

Das bedeutet, dass die Matrix an der Hauptdiagonalen gespiegelt wird.
Die Elemente der Hauptdiagonalen verändern sich dabei nicht



Typ (n, m) Typ (m, n)

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Typ (3, 2) Typ (2, 3)

2.2.2 Einheitsmatrix

Eine *Einheitsmatrix* $\mathbf{I}$ (*identity matrix*) ist eine quadratische Matrix (n=m), bei der die Diagonalelemente 1 und alle anderen Elemente 0 sind.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Obere Dreiecksmatrix

Eine *obere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix, bei der die Elemente unter der Hauptdiagonale 0 sind.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2.3 Matrixoperationen

2.3.1 Addition (und Subtraktion) von Matrizen

Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ des gleichen Typs (n, m) werden wie folgt addiert:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad\qquad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+4 \\ 3+3 & 4+2 \\ 5+1 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Multiplikation von Matrizen

Matrix $\mathbf{A}$ sei vom Typ (m, n) und Matrix $\mathbf{B}$ sei vom Typ (n, r).
Die Multiplikation ist definiert als:

$$\underbrace{\underset{\text{Typ (m, n)}}{\mathbf{A}} \cdot \underset{\text{Typ (n, r)}}{\mathbf{B}}}_{\text{Verkettung}} = \underset{\text{Typ (m, r)}}{\mathbf{C}}$$

$$c_{ik} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pk}$$

Wichtig: Multipliziert werden können nur verkettbare Matrizen.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Rechenschema

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{A} & \end{array}$$

2.3.3 Matrix-Vektor-Multiplikation

Matrix $\mathbf{A}$ sei vom Typ (m, n) und $\mathbf{b}$ sei ein n-zeiliger Vektor.
Die Multiplikation ist definiert als:

$$\underbrace{\underset{\text{Typ (m, n)}}{\mathbf{A}} \cdot \underset{\text{Typ (n, 1)}}{\mathbf{b}}}_{\text{Verkettung}} = \underset{\text{Typ (m, 1)}}{\mathbf{c}}$$

$$c_i = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_p$$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Rechenschema

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{A} & \end{array}$$

Anwendung: Darstellung lin. Gleichungssysteme als Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mm}x_m = b_m \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{l} +5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -9 \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ -9x_1 - 2x_2 - 5x_3 = +7 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} +5 & +2 & +7 \\ -2 & +6 & -2 \\ -9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ +7 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$

Lösungsvektor $\mathbf{b}$

Unbekanntenvektor $\mathbf{x}$

Lineare Gleichungssysteme lassen sich darstellen in der Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Rechenregeln für Produkte

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

2.4 Kennwerte von Matrizen

2.4.1 Determinante

Die *Determinante* ist ein wichtiger Kennwert <u>quadratischer</u> Matrizen.

Ist A vom Typ (n, n) so beschreibt man die Determinante mit:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

<u>Wichtige Anwendung von Determinanten</u>:

- Ein Gleichungssystem $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ hat dann eine eindeutige Lösung, wenn gilt: $\det \mathbf{A} \neq 0$

- Betrachtet man die Zeilen oder Spalten einer Matrix als Vektoren, so gilt: Die Vektoren sind nur dann lin. unabhängig, wenn gilt: $\det \mathbf{A} \neq 0$

Nützliche Eigenschaften von Determinanten

Zeilen-/Spalten-Additionsregel:

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zur k-ten Spalte (Zeile) ein Vielfaches der l-ten Spalte (Zeile) addiert.

Determinante einer oberen Dreiecksmatrix:

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix entspricht dem Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen.

Beispiel:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -30$$

ÜBUNG: Berechnung der Determinante

Gegeben ist folgende Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix, indem Sie die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen mit der *Zeilen-/Spalten-Additionsregel* zu 0 umformen:

2.4.2 Rang einer Matrix

Der Rang einer (n,m)-Matrix entspricht der max. Anzahl der in ihr enthaltenen linear unabhängigen Vektoren.

Rangerhaltungsregeln:

Der Rang einer Matrix A ändert sich nicht,
- beim Vertauschen zweier Zeilen,
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $c \neq 0$,
- Addition eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- beim Transponieren von A.

Rangbestimmung:

Matrix mit den Rangerhaltungsregeln in eine obere Dreiecksmatrix umwandeln.

Rang der Matrix = Anzahl der von Null verschiedenen Zeilenvektoren.

Beispiele:

$$rg(\mathbf{A}) = rg\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 3 \qquad rg(\mathbf{B}) = rg\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

ÜBUNG: Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4.3 Spur einer Matrix

Die *Spur* einer Matrix ist die Summe der Hauptdiagonalelemente.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$spur(\mathbf{A}) = 2-3+5 = 4$$

2.5 Inverse einer Matrix

Gegeben sei eine quadratische Matrix A, deren Determinante ungleich 0 ist.

Für die *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$ der Matrix gilt:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}}$$

Anwendung: Lösen von Gleichungssystemen

Gegeben ist das lin. Gleichungssystem $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Gesucht ist die Lösung $\mathbf{x}$ des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{I}\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}\end{aligned}$$

Anm.: Auf Rechnern sollten lin. Gleichungssyst. möglichst **nicht** durch Matrixinversion gelöst werden, da sich Rundungseffekte besonder ungünstig auswirken.

2. 6 Spezielle Klassen von Matrizen

2.6.1 Symmetrische Matrix

Eine *symmetrische Matrix* ist eine quadratische Matrix (n=m), bei der alle Elemente spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen sind, d.h.

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad \text{für alle } i, k$$

Für symmetrische Matrizen gilt: $\boxed{\mathbf{A}^T = \mathbf{A}}$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Schiefsymmetrische Matrix

Eine *schiefsymmetrische Matrix* ist eine quadratische Matrix (n=m), bei der alle Elemente <u>invers spiegelsymmetrisch</u> zur Hauptdiagonalen sind, d.h.

$$a_{ik} = -a_{ki} \qquad \text{für alle } i, k$$

Für schiefsymmetrische Matrizen gilt: $\boxed{\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}}$

<u>Beispiel:</u>

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2.6.3 Orthogonale Matrizen

Eine *orthogonale Matrix* ist eine quadratische Matrix (n=m) für die gilt:

$$\boxed{\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}}$$

Für orthogonale Matrizen gilt:

a) $\det \mathbf{A} = \pm 1$

b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$

c) zwei beliebige Zeilenvektoren (o. Spaltenvekt.) stehen senkrecht aufeinander (Skalarprod. = 0)

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

2.7 Singuläre Werte Zerlegung (SVD – singular value decomposition)

Jede (m, n)-Matrix (m >= n) kann zerlegt werden in

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T}$$

Mit $\mathbf{U}$ orthogonale (m, m)-Matrix
$\mathbf{D}$ (m, n)-Diagonalmatrix
$\mathbf{V}$ orthogonale (n, n)-Matrix

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.813 & -0.289 & -0.506 \\ -0.217 & -0.655 & 0.723 \\ -0.541 & 0.698 & 0.470 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13.05 & 0 \\ 0 & 2.12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.701 & 0.713 \\ -0.713 & -0.701 \end{bmatrix}$$

Anwendung der SVD

Numerisch günstiges Lösungsverfahren für überbestimmte Gleichungssysteme (Näherungslösung im Sinne des „kleinsten Fehlerquadrates“).

Bei gegebener SVD der Koeffizientenmatrix ist die Lösung:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot diag(1/w_j) \cdot (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{b})}$$

3. Lösen linearer Gleichungssysteme

3.1 Lösungsverhalten von Gleichungssystemen

<u>Gleichungssysteme vom Typ (n,n):</u>

Ein (n,n)-Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt: $\det \mathbf{A} \neq 0$

<u>Überbestimmte Gleichungssysteme</u> <u>(s. Kap. 3.2)</u>**<u>:</u>**

Überbestimmte Gleichungssysteme besitzen oft keine Lösung, da die Gleichungen im Widerspruch zueinander stehen.

<u>Einfaches Beispiel</u>: $2x = 10$
(2 Gleichungen, eine Unbekannte) $2x = 12$

Stattdessen sucht man eine „bestmögliche“ Lösung.
→ *Ausgleichslösung*, *Gauss‘sche Fehlerquadratmethode*

Homogene Gleichungssysteme:

Gleichungssysteme des Typs heissen homogen.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homogene Gleichungssysteme haben stets 0 als gültige Lösung (*triviale Lösung*).

Homogene lineare Gleichungssysteme können auch *nichttriviale Lösungen* haben, wenn es **freie Variablen** gibt. Freie Variablen können beliebig gewählt werden.

Freie Variablen sind immer dann vorhanden, wenn gilt : rg(**A**) < n
→ Anzahl der freien Variablen = n – rg(**A**)

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

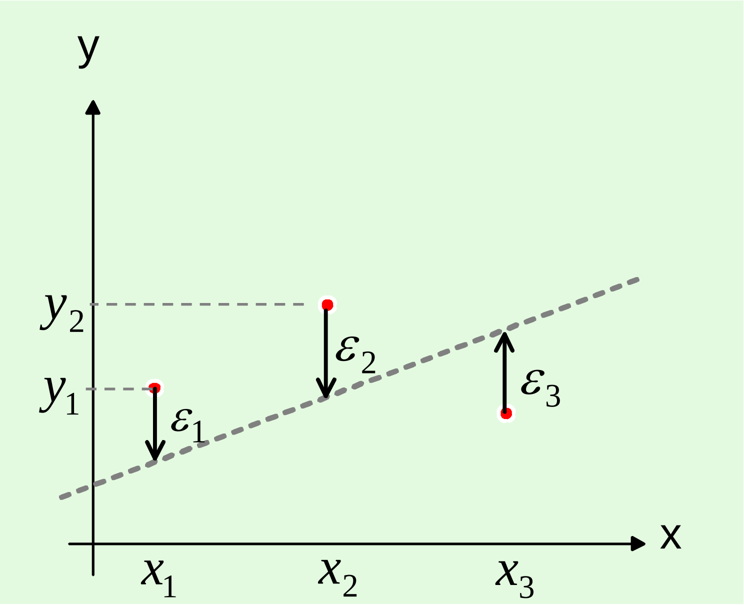
rg(**A**) = 2 < n = 3

→ nichttriviale Lösungen

3.2 Überbestimmte Gleichungssysteme

3.2.1 Praktische Problemstellung an einem Beispiel

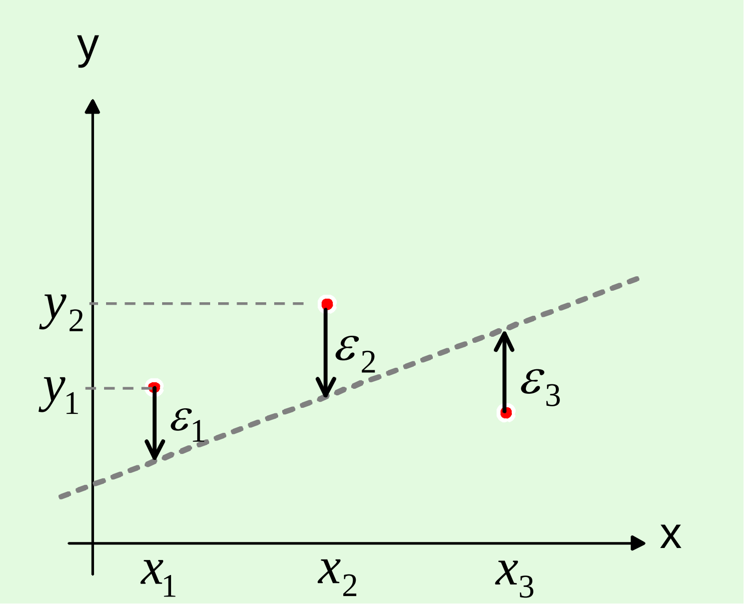
Gegeben sind eine Menge von Messpunkten.
Es sei bekannt, dass die Messwerte auf einer Geraden $y = ax + b$ liegen müssen.
Die Parameter der Geradengleichung a und b sollen bestimmt werden.



<u>Frage:</u> Wie legt man die Gerade „bestmöglich" in die Punktmenge ?

Es ist offensichtlich, dass das Gleichungssystem zur Bestimmung von a und b keine Lösung hat, da es keine Gerade gibt, die durch alle Punkte geht.

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 = ax_3 + b$$

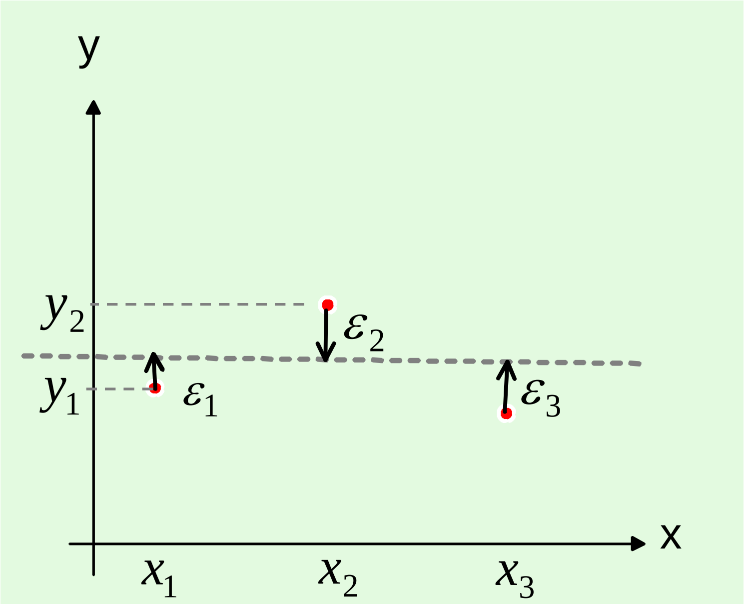


Um das Gleichungssystem lösbar zu machen, könnte man aber die y-Werte „verbessern“ (auf die Gerade schieben):

$$y_1 + \varepsilon_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 + \varepsilon_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 + \varepsilon_3 = ax_3 + b$$

Die beste Gerade wird diejenige sein, wo möglichst wenig verbessert werden muss.

$$y_1 + \varepsilon_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 + \varepsilon_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 + \varepsilon_3 = ax_3 + b$$



Mit anderen Worten, es werden diejenigen Geradenparameter a und b gesucht, so dass gilt:

$(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_3)^2$ → soll minimal werden

→ Gauss'sche Fehlerquadratmethode, Ausgleichslösung, least suares solution

3.2.2 Verallgemeinerung

Ein linearen Ausgleichsproblems liegt vor, wenn die Fehlergleichungen sich auf die folgende Form bringen lassen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nm} \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \ldots \\ \xi_m \end{pmatrix}}_{\text{zu berechnen}} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \ldots \\ L_n \end{pmatrix}}_{\text{bekannt}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\text{zu minimieren}} \qquad n \geq m \qquad (1) \qquad \boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l} + \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Beispiel: Gesucht sind die Parameter *a* und *b* der Geradengleichung *y=ax+b*.
Gegeben sind 3 Messpunkte (2, 4), (5, 11), (8, 15).

Einsetzen der Messpunkte in die Geradengleichung führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4 + \varepsilon_1 &= 2a + b \\ 11 + \varepsilon_2 &= 5a + b \\ 15 + \varepsilon_3 &= 8a + b \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung des Gauss'schen Ansatzes auf (Gl. 1) führt zu der folgenden allgemeinen Lösung (o.Bew. *1)

$$\boxed{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l}} \quad (2)$$

→ *Normalgleichungen*

Die Normalgleichungen liefern die bestmögliche Lösung im Sinne der Fehlerminimierung (Optimallösung).

Beispiel: Fortsetzung "Geradenbeispiel"

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 & 15 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183 \\ 30 \end{bmatrix}$$

aus (2) → $\begin{bmatrix} 93 & 15 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 183 \\ 30 \end{bmatrix}$ **auflösen →** $a = 1.833$, $b = 0.833$

*1 s. Einführung in die Numerische Mathematik I, Josef Stoer, Springer Verlag):

3.2.3 Pseudoinverse (= „Inverse“ eines überbestimmten Gleichungssystems)

Für überbestimmte Gleichungssysteme gilt der Ausgleichsansatz (s.u.)

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l}$$

Durch folgende Umformungen lässt sich die Lösung auch direkt hinschreiben:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l}$$

beide Seiten mit dem umrandeten Ausdruck multiplizieren

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{l}$$

zusammenfassen

$$\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T}_{\text{Pseudoinverse}} \cdot \mathbf{l}$$

Ergebnis

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{l}} \qquad \boxed{\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T}$$