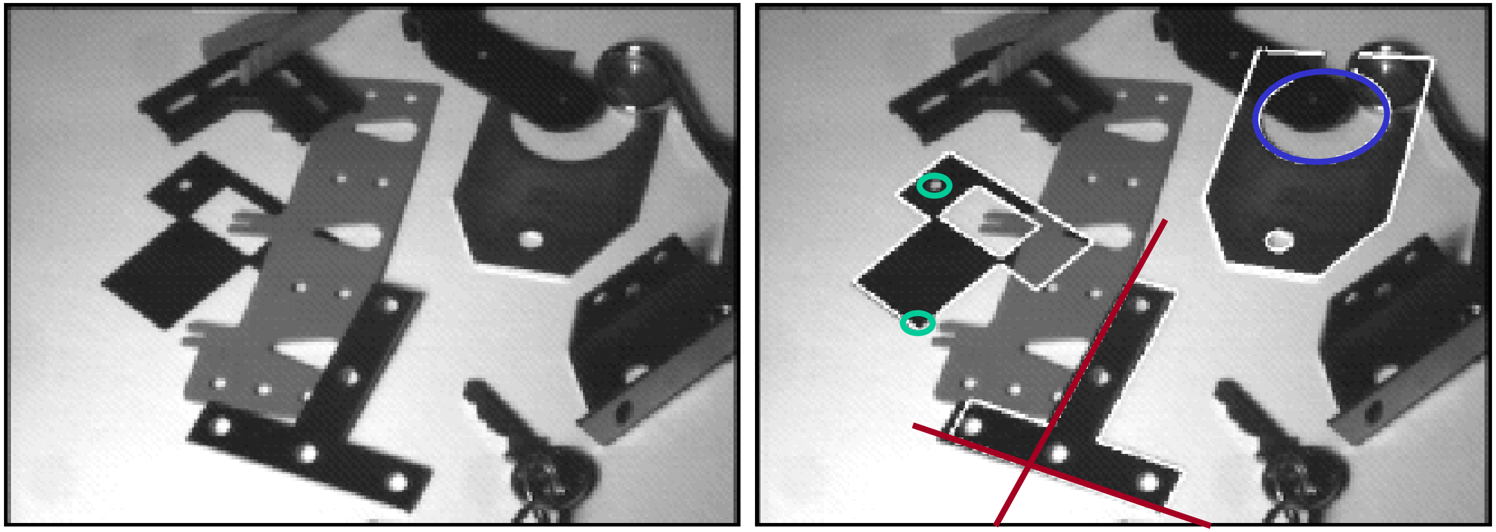
# 2.6 Projektive Invarianten der Ebene

## *2.6.1 Übersicht*

Es gibt Eigenschaften

- zwischen koplanaren Punkten, Geraden und Kegelschnitten (z.B. Ellipsen)
- die als Kennzahl $I$ beschreibbar sind und sich
- auch bei perspektivischer Verzerrung nicht verändern

( → *perspektivische Invarianten* )



s. Planar Object Recognition using ProjectiveShape Representation
Rothwell, Zisserman, Forsyth, Mundy

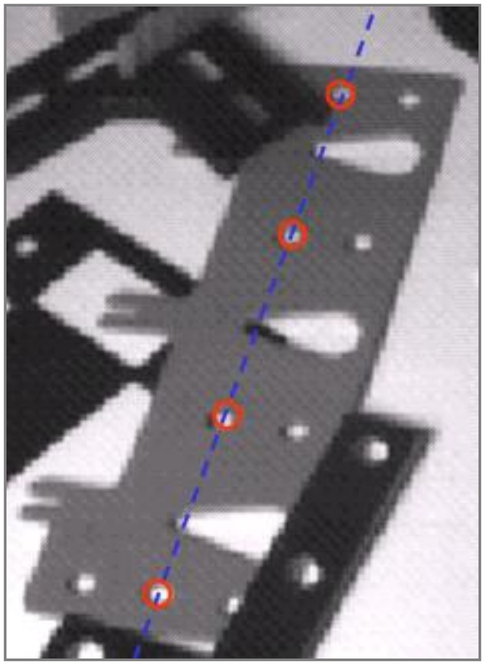
## 2.6.2 Anwendungen

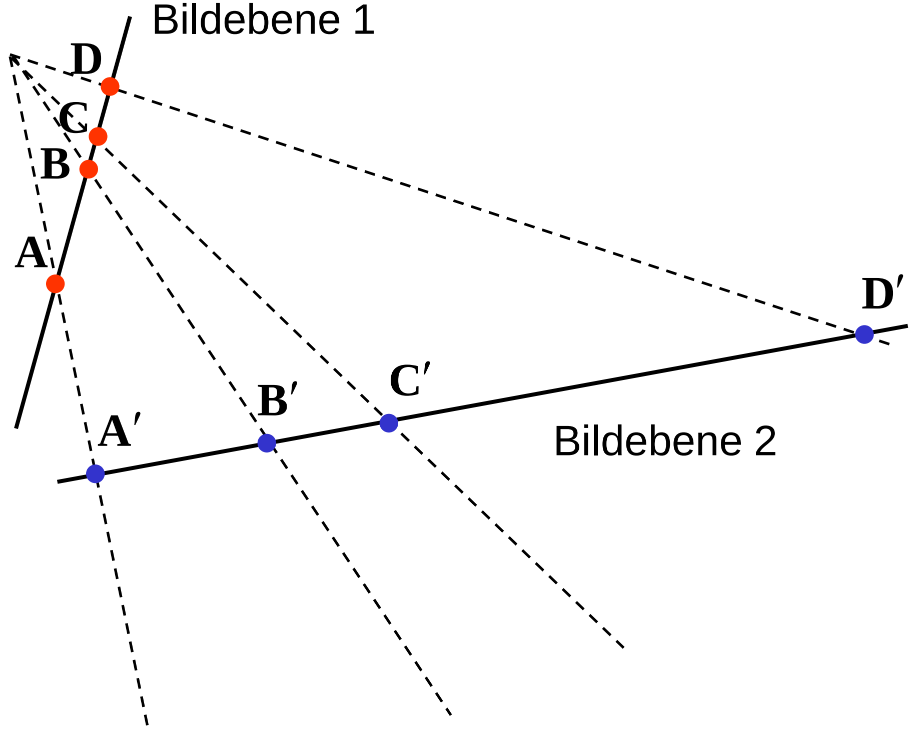
Robuste Identifikation ebener Objekte
- bei teilweiser Verdeckung
- ….

visuelle Navigation
- In-house-Navigation anhand von sichtbaren Merkmalen
- …..

geometrischer Hashing
- Erkennen von Dokumenten
- Bildsuche
- Objektdatenbanken in Bildmesssystemen

## *2.6.3 Vier kollineare Punkte (Doppelverhältnis = cross ratio)*

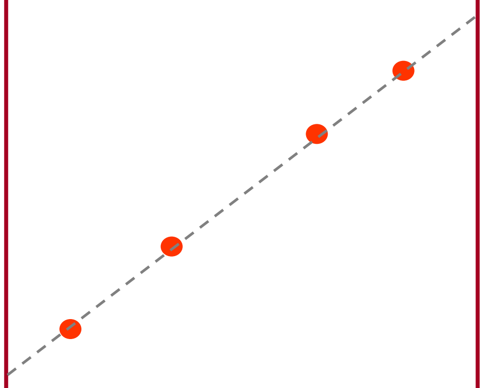




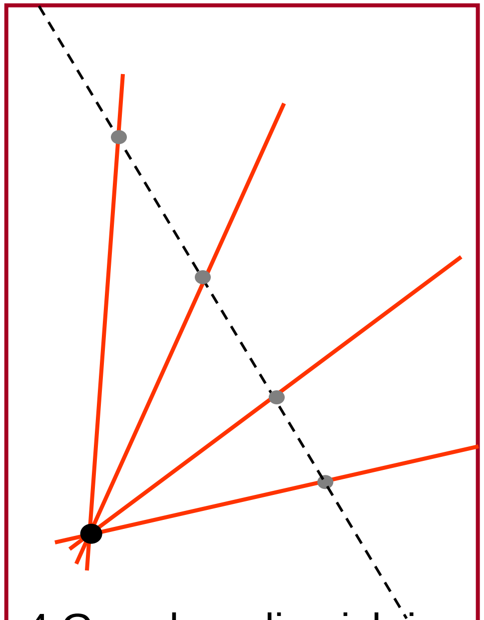

Das Doppelverhältnis $I$ ist gegenüber perspektivischen Transformationen invariant.

$$I = \frac{\overline{\mathbf{AC}} \cdot \overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{AD}} \cdot \overline{\mathbf{BC}}} = \frac{\overline{\mathbf{A'C'}} \cdot \overline{\mathbf{B'D'}}}{\overline{\mathbf{A'D'}} \cdot \overline{\mathbf{B'C'}}}$$

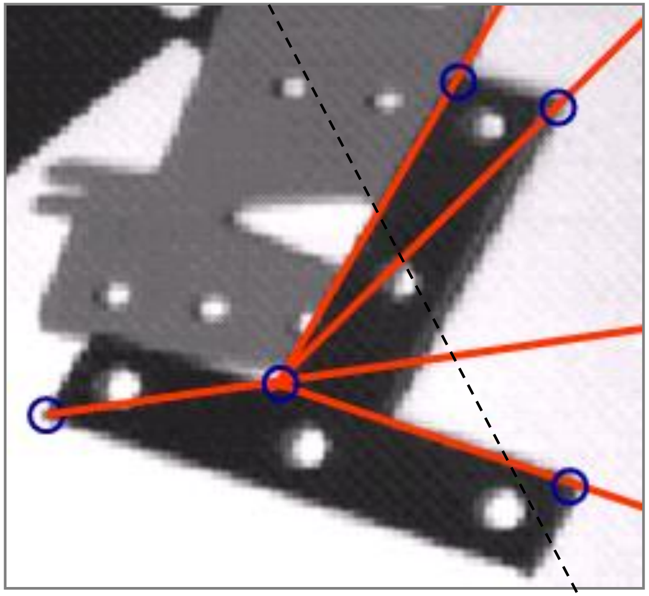
# Dualität: 4 kollineare Punkte <---> 4 Geraden, die sich in einem Punkt schneiden



4 kollineare Punkte



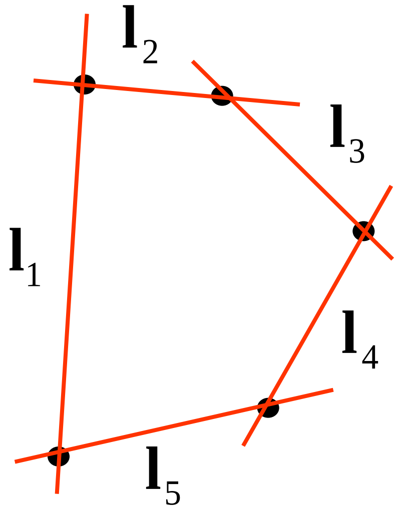
4 Geraden, die sich in einem Punkt schneiden



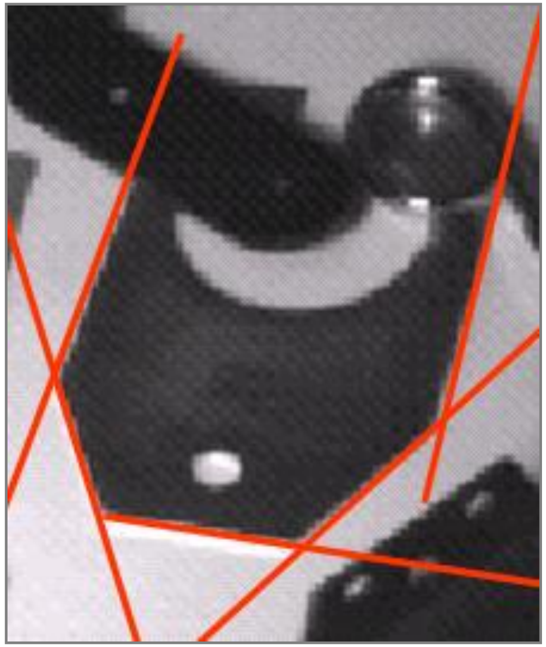
Ein System aus 4 Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, ist dual zu einem System aus 4 kollinearen Punkten.

<u>Beweis</u>: Jeder Schnitt durch die 4 Geraden erzeugt 4 kollineare Punkte.
Unabhängig vom Schnitt ist deren Doppelverhältnis immer gleich.

## 2.6.4 Fünf koplanare Geraden




5 koplanare Geraden



Gegeben seien 5 Geraden:

$$\mathbf{l}_i = (a_i, b_i, c_i)^T$$

$$i = 1 \ldots 5$$

Aus jew. 3 Geraden werden wie folgt Matrizen gebildet:

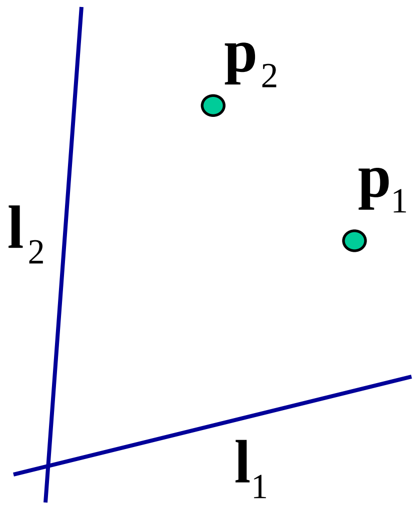
$$\mathbf{M}_{ijk} = (\mathbf{l}_i,\ \mathbf{l}_j,\ \mathbf{l}_k)$$

Die 3 Geraden in $\mathbf{M}_{ijk}$ dürfen sich nicht in einem Punkt schneiden !

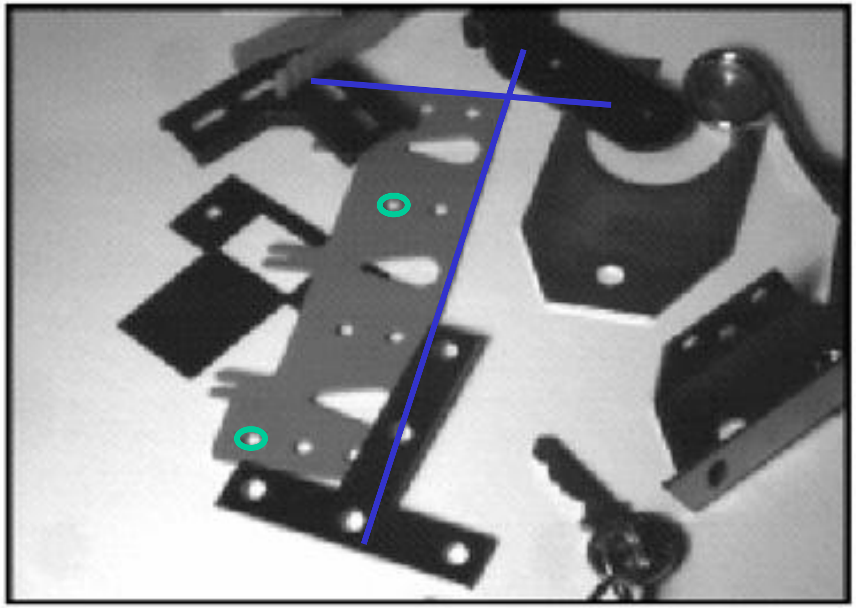
$I_1$ und $I_2$ sind gegenüber perspektivischen Transformationen invariant.

$$I_1 = \frac{|\mathbf{M}_{431}| \cdot |\mathbf{M}_{521}|}{|\mathbf{M}_{421}| \cdot |\mathbf{M}_{531}|} \qquad I_2 = \frac{|\mathbf{M}_{421}| \cdot |\mathbf{M}_{532}|}{|\mathbf{M}_{432}| \cdot |\mathbf{M}_{521}|}$$

## 2.6.5 Zwei Geraden und zwei Punkte




2 Geraden und
2 Punkte

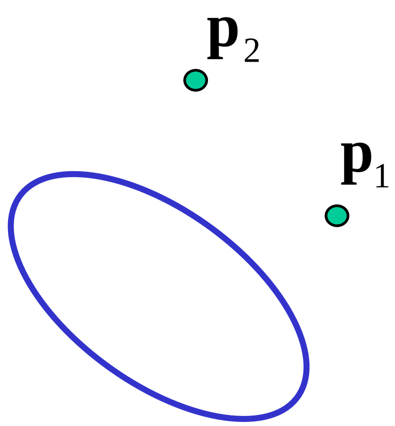


Die Punkte dürfen nicht auf den Geraden liegen !

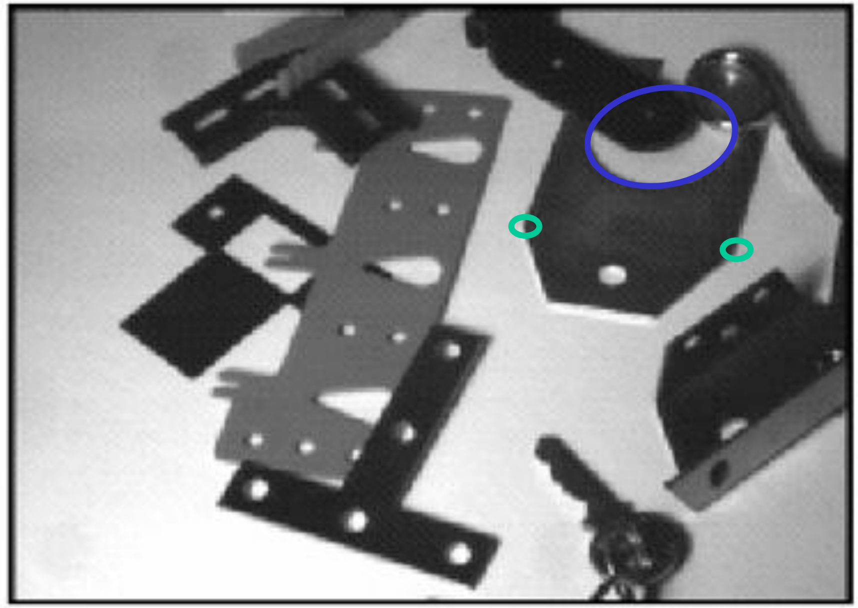
$I$ ist gegenüber perspektivischen Transformationen invariant.

$$I = \frac{\left(\mathbf{l}_1^T \cdot \mathbf{x}_1\right)\cdot\left(\mathbf{l}_2^T \cdot \mathbf{x}_2\right)}{\left(\mathbf{l}_1^T \cdot \mathbf{x}_2\right)\cdot\left(\mathbf{l}_2^T \cdot \mathbf{x}_1\right)}$$

## 2.6.6 Ein Kegelschnitt und zwei Punkte




1 Kegelschnitt und
2 Punkte

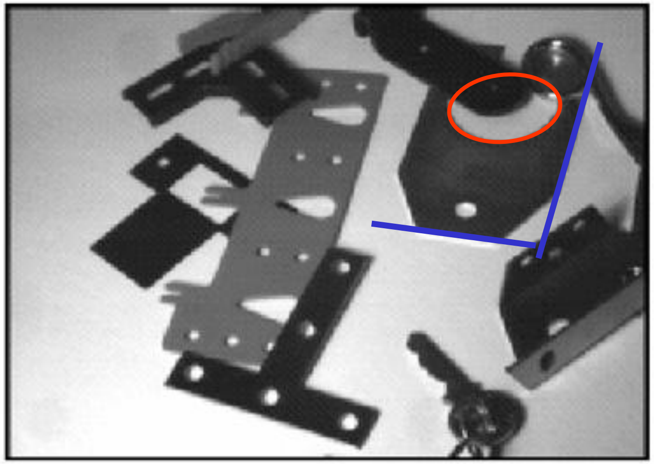


$I$ ist gegenüber perspektivischen Transformationen invariant.

$$I = \frac{\left(\mathbf{x}_1^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{x}_2\right)^2}{\left(\mathbf{x}_1^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{x}_1\right) \cdot \left(\mathbf{x}_2^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{x}_2\right)}$$

# Weitere Invarianten

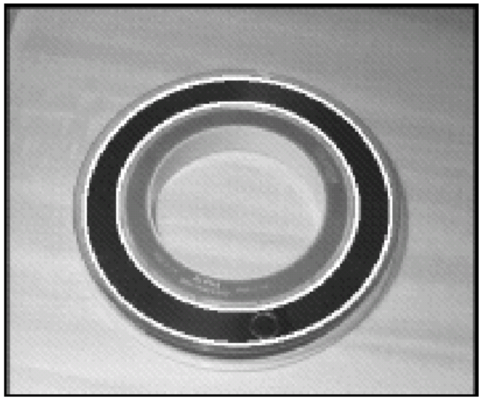
s. Planar Object Recognition using ProjectiveShape Representation
Rothwell, Zisserman, Forsyth, Mundy

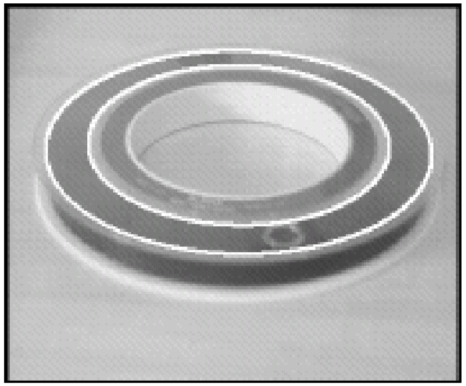


## Kegelschnitt und 2 Geraden

$$I = \frac{\left(\mathbf{l}_1^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{l}_2\right)^2}{\left(\mathbf{l}_1^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{l}_1\right) \cdot \left(\mathbf{l}_2^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{l}_2\right)}$$

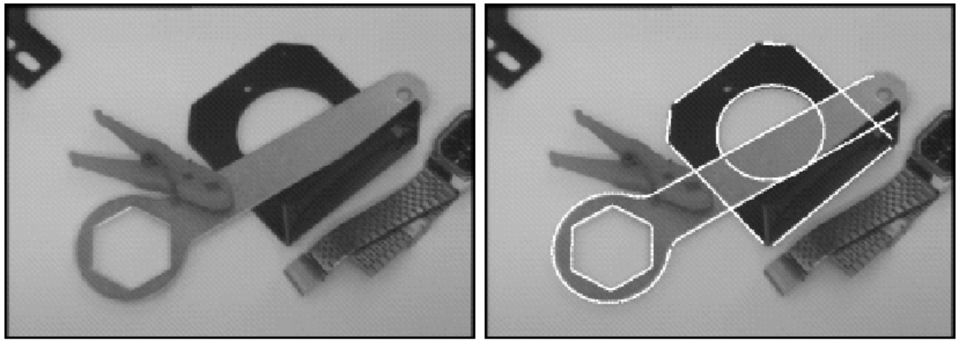
## 2 Kegelschnitte





$$I = \frac{spur\left(\mathbf{C}_1^{-1} \cdot \mathbf{C}_2\right) \cdot \left|\mathbf{C}_1\right|^{1/3}}{\left|\mathbf{C}_2\right|^{1/3}}$$

# Beispiel: Identifikation mit Hilfe projektiver Invarianten



s. Planar Object Recognition using ProjectiveShape Representation

Rothwell, Zisserman, Forsyth, Mundy