



# Angewandte lineare Algebra und Ausgleichsrechnung

Prof. Dr. Andreas Meisel

## Zum Inhalt

- Problemstellung
- Lösungsverfahren
- Gaußelimination
- Rechnen mit begrenzter Stellenzahl
- Lösen überbestimmter Gleichungssysteme
- Ausgleichsrechnung



# 1. Einführung

## 1.1 Aufgabenstellung

Ein wichtiges Problemfeld der Ingenieurmathematik ist die Lösung *linearer Gleichungssysteme*.

Dabei geht es darum, die  $m$  unbekannten Größen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  aus einem System von  $m$  linearen Gleichungen zu bestimmen.

Die Größen  $a_{ik}$  und  $b_i$  sind dabei bekannt.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= b_m \end{aligned} \quad (1)$$

### Beispiel:

$$\begin{aligned} +5x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= -9 \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -9x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= +7 \end{aligned}$$



## 1.2 Matrixschreibweise

In Matrixschreibweise hat (1) die Form:

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (2)$$

mit der *Koeffizientenmatrix*

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

dem *Lösungsvektor*

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

dem *Unbekanntenvektor*

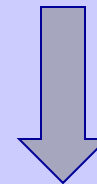
$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$$

### Beispiel:

$$+5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -9$$

$$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-9x_1 - 2x_2 - 5x_3 = +7$$

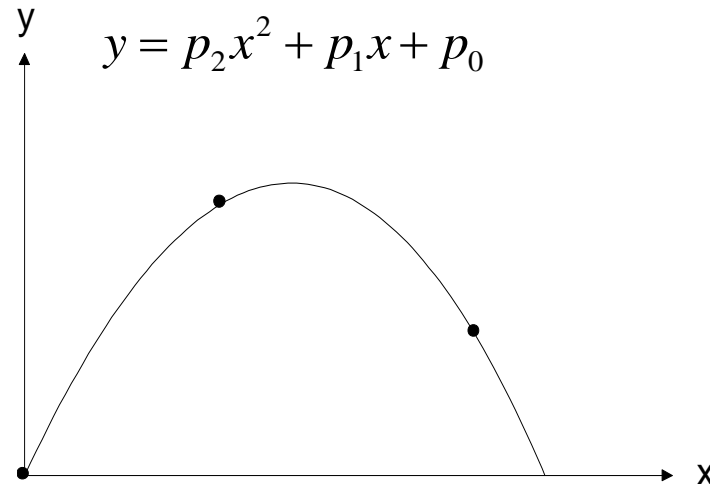


$$\begin{bmatrix} +5 & +2 & +7 \\ -2 & +6 & -2 \\ -9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ +7 \end{pmatrix}$$



## ÜBUNG: Berechnung eines Polynoms aus Meßwerten

Aufgabenstellung: Von einem physikalischen Prozess sei bekannt, daß er parabelförmig verläuft (z.B. Wurfparabel).



An drei Punkten werden die Koordinaten  $(x,y)$  bestimmt:

$$(x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (2, 6)$$

$$(x_3, y_3) = (5, 3)$$

Stellen Sie das lin. Gleichungssystem auf, dessen Lösung die unbekannten Parameter  $p_0, p_1, p_2$  liefert.



## 2. Lösungsverfahren

### 2.1 Übersicht über einige Lösungsverfahren

#### 1. **Cramersche Regel (Determinantenverfahren)**

- für bis zu max. 3 Unbekannte gutes manuelles Verfahren
- für mehr als 3 Unbekannte ist es sehr uneffektiv

#### 2. **Gauß-Elimination (Dreieckszerlegung einer Matrix)**

- gutes manuelles Verfahren, auch für mehr als 3 Unbekannte
- leicht implementierbar
- auch bei begrenzter Stellenzahl (Computer !) noch brauchbar durch "*Pivotisierung*"

#### 3. **Householder-Transformation**

- Verfahren zur Minimierung des Rundungsfehlereinflusses
- auch zur Lösung überbestimmter Gleichungssysteme verwendbar
- siehe „*Einführung in die Numerische Mathematik 1*“, J. Stoer, Springer Verlag

#### 4. **Singuläre-Werte-Zerlegung (SVD: Singular Value Decomposition)**

- Verfahren für numerisch kritische Fälle, speziell für überbestimmte, schlecht konditionierte Gleichungssysteme
- siehe "*Numerical Recipes in C*", Cambridge University Press



## 2.2 Gauß-Elimination

### Prinzip:

Durch geeignete Vertauschungen und Linearkombinationen von Gleichungen (Äquivalenzumformungen) wird das Gleichungssystem schrittweise in Diagonalform (Dreiecksgestalt) gebracht:

$$\underline{R}\vec{x} = \vec{c}, \quad \underline{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1n} \\ & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Beispiel :  $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 131 \\ 23 \\ 22 \end{pmatrix}$

Folgende Äquivalenzumformungen sind erlaubt:

- Vertauschen zweier Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ungleich 0
- Add./Subt. einer Gleichg. mit dem Vielfachen einer anderen Gleichg.

Das so "gestaffelte" Gleichungssystem lässt sich dann leicht durch schrittweise Auflösung, beginnend bei der letzten Gleichung, auflösen (Rückwärtseinsetzen).

siehe "Einführung in die numerische Mathematik I", Josef Stoer, Springer Verlag



## Beispiel

Demonstration der Wirkungsweise an einem Beispiel:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0.5$$

$$1x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2.5$$

$$(-3/2 \bullet Gl.1 = -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -1.5)$$

$$(-1/2 \bullet Gl.1 = -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 = -0.5)$$

Subtraktion des 3/2-fachen der 1. Gleichung von der 2. Gleichung und

Subtraktion des 1/2-fachen der 1. Gleichung von der 3. Gleichung ergibt:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = +1$$

$$0 \quad -1x_2 + 1x_3 = -1$$

$$0 \quad +2x_2 + 8x_3 = +2$$

$$(+2 \bullet Gl.2 = 0 \quad -2x_2 + 2x_3 = -2)$$

Addition des 2-fachen der 2. Gleichung von der 3. Gleichung ergibt:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = +1$$

$$-1x_2 + 1x_3 = -1$$

$$10x_3 = +0$$

Daraus folgt durch "*Rückwärtseinsetzen*":  $x_3=0$ ,  $x_2=1$ ,  $x_1=-0.5$



## Gauß-Elimination in kürzerer Matrixschreibweise

1.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0.5 \\ 1 & 3 & 9 & 2.5 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} -3/2 \bullet Gl.1 \quad (-3 \quad -3 \quad -3 \mid -1.5) \\ -1/2 \bullet Gl.1 \quad (-1 \quad -1 \quad -1 \mid -0.5) \end{array}$$

2.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \end{array} \right] \quad +2 \bullet Gl.2 \quad (0 \quad -2 \quad 2 \mid -2)$$

3.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array} \right]$$



## ÜBUNG: Lösen eines lin. Gleichungssystems durch Gaußelimination

Lösen Sie folgendes lin. Gleichungssystem:

$$\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



## 2.3 Gauß-Elimination bei begrenzter Stellenzahl

Beispiel: Wie lautet die Lösung des folgenden Gleichungssystems bei vierstelliger (d.h. vier signifikante Ziffern) Rechnung?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.00031 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Lösung des Gleichungssystems bei Vertauschung der Zeilen (ebenfalls bei vierstelliger Rechnung)?

$$\begin{bmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Welches Ergebnis ist das bessere?



## Kritisch für die Rechengenauigkeit:

- Matricelemente besitzen unterschiedliche Größenordnungen  
→ Gefahr der *Auslöschung*,
- schleifende Schnitte (Zeilen sind nahezu Vielfache von anderen Zeilen),  
Fehler in den Eingangsdaten wirken sich dann besonders gravierend aus

## Verbesserung der Rechengenauigkeit durch "*Spaltenpivotisierung*":

Wird mit begrenzter Stellenzahl gerechnet (Computer !), so ist die Rechengenauigkeit größer, wenn bei jedem Eliminationsschritt die Zeilen so getauscht werden, daß der Betrag des Pivotelements (=Diagonalelement) möglichst groß ist.



## Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} -2/3 \cdot Gl.1 \\ -1/3 \cdot Gl.1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1/3 & -1 & 17/3 \\ 0 & 2/3 & -1 & 10/3 \end{array} \right]$$

Vertauschung Z2 <-> Z3, um das betragsgrößte Diagonalelement als Pivotelement zu setzen

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2/3 & -1 & 10/3 \\ 0 & 1/3 & -1 & 17/3 \end{array} \right] \quad -1/2 \cdot Gl.2 \quad \rightarrow \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2/3 & -1 & 10/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 4 \end{array} \right]$$



## 3. Ausgleichsrechnung

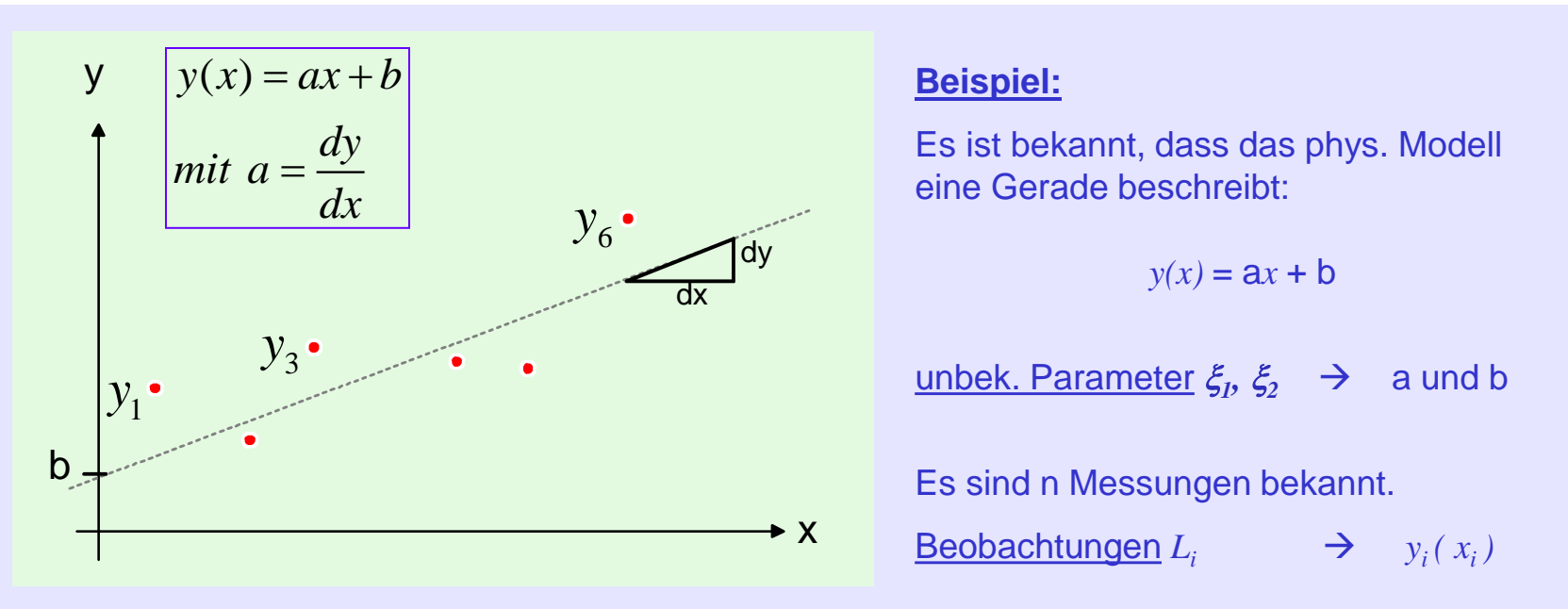
### 3.1 Aufgabenstellung und Vorüberlegungen

Gegeben sei ein Funktion  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

Der Funktionsverlauf werde durch die Parameter  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m)$  festgelegt.

Die  $m$  Parameter der Funktion sind unbekannt und sollen bestimmt werden.

Es stehen mindestens  $m$  Messwerte  $y_i$  (sog. *Beobachtungen*  $L_i$ ) zur Verfügung.



#### Beispiel:

Es ist bekannt, dass das phys. Modell eine Gerade beschreibt:

$$y(x) = ax + b$$

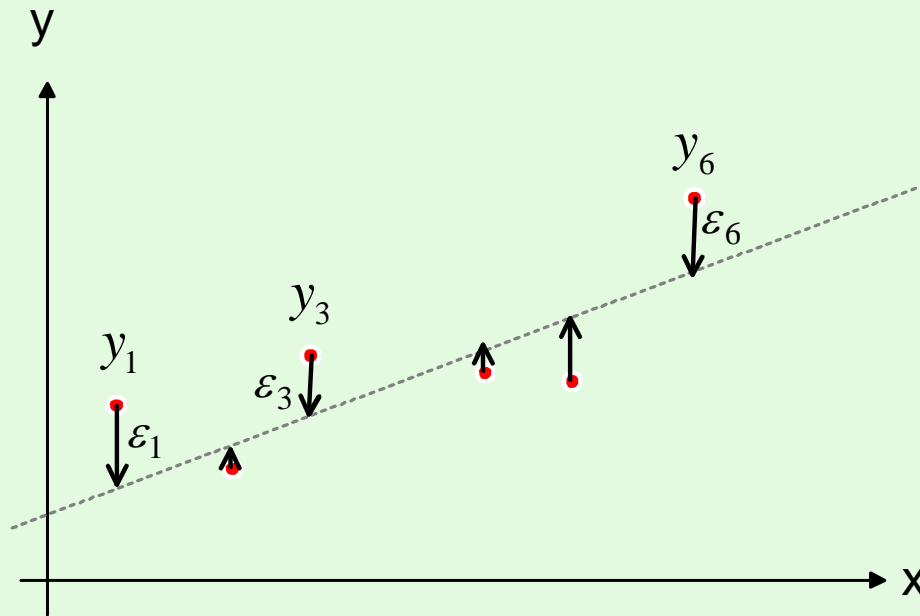
unbek. Parameter  $\xi_1, \xi_2 \rightarrow a$  und  $b$

Es sind  $n$  Messungen bekannt.

Beobachtungen  $L_i \rightarrow y_i(x_i)$



Alle Beobachtungen (Messungen) sind fehlerbehaftet.  
Die Beobachtungen  $L_i$  müssen daher um die (unbek.) Werte  $\varepsilon_i$  "verbessert" werden.



### Fortsetzung des Beispiels

Angenommen die Parameter  $a$  und  $b$  der Geraden wären bekannt, dann müssten die Messwerte um  $\varepsilon_i$  verbessert werden, damit sie auf der Geraden liegen.

$$y_1 + \varepsilon_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 + \varepsilon_2 = ax_2 + b$$

.....

Dieser Sachverhalt wird beschrieben durch die sog. *Fehlergleichungen*:

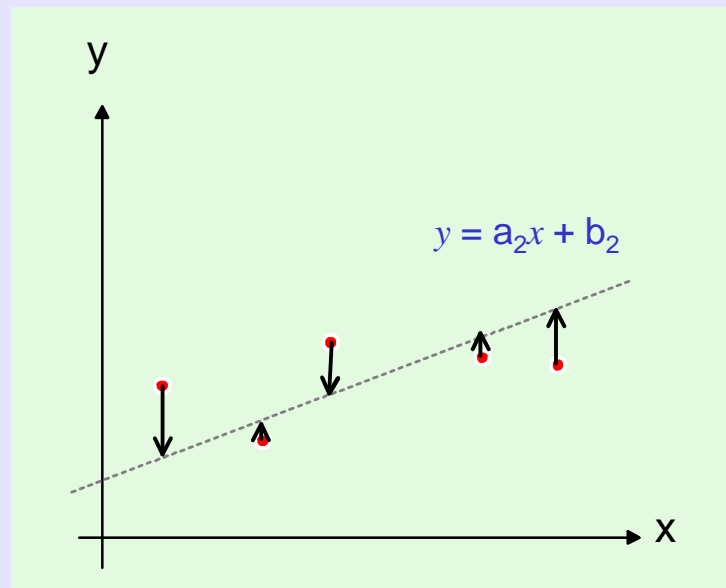
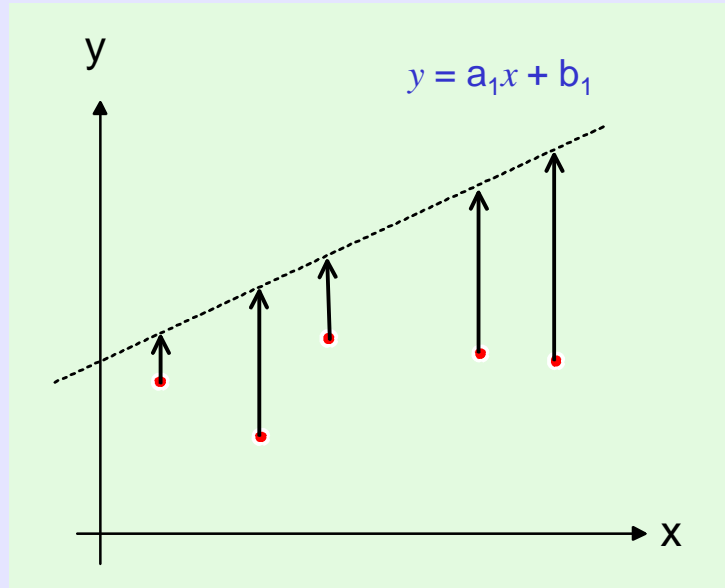
$$L_i + \varepsilon_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$



## Welche Parameter ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$ ) sind also die bestmögliche Lösung ?

### Fortsetzung des Beispiels

Welche der beiden Geraden ist die bessere Lösung ?



Es geht also darum die unbekannt Parameter ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$ ) so zu bestimmen, dass die Verbesserungen  $\varepsilon_i$  der Beobachtungen  $L_i$  minimal werden.



## Realisierung dieser Idee:

Um in einem Gleichungssystem

$$L_i + \varepsilon_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

die unbekannt Parameter  $\xi_1 \dots, \xi_m$  bestimmen zu können, muss gelten:  $n \geq m$

Bei überbestimmten Gleichungssystemen gibt es i.Allg. keine Lösung, die alle Gleichungen erfüllt.

Einf. Beispiel:

$$2x = 10$$

$$2x = 12$$

Es ist offensichtlich, dass kein  $x$  beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen kann.

Wenn das Problem also schon nicht exakt gelöst werden kann, dann soll die Lösung doch wenigstens "möglichst gut" sein.

Eine gängige Definition für "möglichst gut" ist folgender Ausdruck (C. F. Gauss):

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m) - L_i]^2 \rightarrow \textit{Minimum} \quad (2)$$



## Beispiel 1: Würfelbeispiel (1 Unbekannte)

Gegeben ist ein Würfel. Die Seitenlänge  $a$  ist unbekannt und soll bestimmt werden.

Das Volumen  $V$  des Würfels wurde 3 mal mit Hilfe eines Messbechers gemessen:

$$V_1 = 125\text{cm}^3$$

$$V_2 = 130\text{cm}^3$$

$$V_3 = 110\text{cm}^3$$

→  $a$  unbekannter Parameter  $\xi$   
 $V=a^3$  Funktion  $f_i(\xi)$  mit unbekanntem Parameter  $\xi$   
 $V_i$  Beobachtungen  $L_i$



Die Fehlergleichungen lauten in diesem Fall:

$$V_1 + \varepsilon_1 = a^3$$

$$V_2 + \varepsilon_2 = a^3$$

$$V_3 + \varepsilon_3 = a^3$$

Anm.: Die  $\varepsilon$  werden nur deswegen benötigt, damit die Gleichungen sich nicht widersprechen.



## Lösungsansatz (im Sinne der Ausgleichsrechnung):

1. Fehlerquadratformel aufstellen:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_3)^2 \\ = & (a^3 - V_1)^2 + (a^3 - V_2)^2 + (a^3 - V_3)^2 \quad \rightarrow \text{a muss so bestimmt werden, dass} \\ & \text{dieser Ausdruck minimal wird} \end{aligned}$$

2. Man erhält das Minimum durch Ableiten (nach der Unbekannten a) und Nullsetzen:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{da} \left[ (a^3 - V_1)^2 + (a^3 - V_2)^2 + (a^3 - V_3)^2 \right] \\ = & 6a^2 \cdot (a^3 - V_1) + 6a^2 \cdot (a^3 - V_2) + 6a^2 \cdot (a^3 - V_3) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}}$$



## Beispiel 2: Geradenbeispiel (2 Unbekannte)

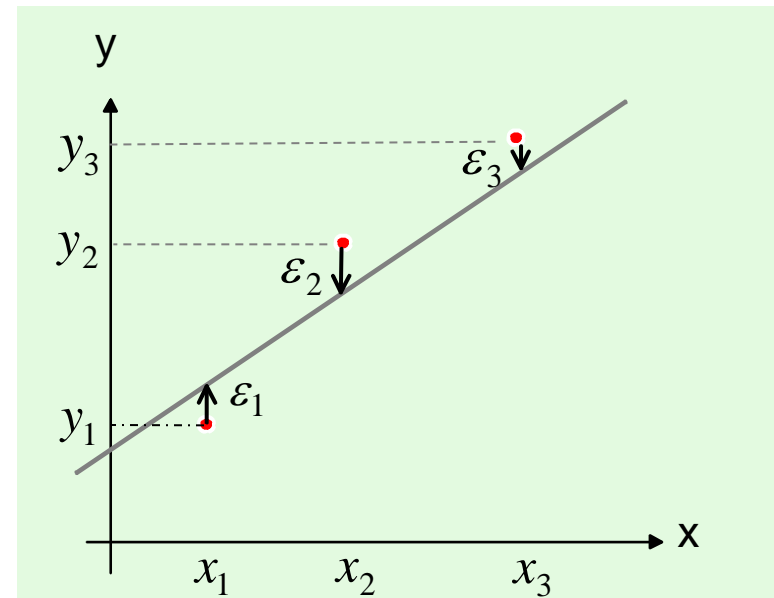
Bekannt ist, daß das phys. Modell eines Prozesses durch eine Gerade  $y=ax+b$  beschrieben wird. Gemessen wurden folgende Werte:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 & \rightarrow y_1 = 4 \\ x_2 = 5 & \rightarrow y_2 = 11 \\ x_3 = 8 & \rightarrow y_3 = 15 \end{array}$$

→ a, b            unbekannte Parameter  $\xi_1 \dots$   
 $y=ax+b$         Funktion  $f_i(\xi_1 \dots)$  mit unbekanntem Parameter  $\xi_1 \dots$   
 $y_i$                 Beobachtungen  $L_i$

Die Fehlergleichungen lauten  
in diesem Fall:

$$\begin{array}{l} y_1 + \varepsilon_1 = ax_1 + b \\ y_2 + \varepsilon_2 = ax_2 + b \\ y_3 + \varepsilon_3 = ax_3 + b \end{array}$$





## Lösungsansatz (im Sinne der Ausgleichsrechnung):

### 1. Fehlerquadratformel aufstellen:

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_3)^2 \\
 = & (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_3 + b - y_3)^2 \rightarrow \text{soll minimal werden}
 \end{aligned}$$

### 2. Ableitungen nach a und b berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial a} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) = x_1 \cdot 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) + x_2 \cdot 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) + x_3 \cdot 2 \cdot (ax_3 + b - y_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) + 2 \cdot (ax_3 + b - y_3)$$

### 3. Ableitungen zu Null setzen:

$$\cancel{2} \cdot (ax_1^2 + bx_1 - y_1x_1) + \cancel{2} \cdot (ax_2^2 + bx_2 - y_2x_2) + \cancel{2} \cdot (ax_3^2 + bx_3 - y_3x_3) = 0$$

$$\cancel{2} \cdot (ax_1 + b - y_1) + \cancel{2} \cdot (ax_2 + b - y_2) + \cancel{2} \cdot (ax_3 + b - y_3) = 0$$



4. Durch Umstellen der Gleichungen erhält man:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot a + (x_1 + x_2 + x_3) \cdot b = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot a + (1+1+1) \cdot b = y_1 + y_2 + y_3$$

→ 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten (leicht auflösbar)



## 3.2 Allg. Lösung des Ausgleichsproblems im linearen Fall

### 3.2.1 Beschreibung und Aufstellen der Fehlergleichungen

Ein lineares Ausgleichsproblems liegt vor, wenn die Fehlergleichungen sich auf die folgende Form bringen lassen:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad n \geq m \quad (3) \quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{\xi} = \vec{L} + \vec{\varepsilon}
 \end{array}$$

bekannt
zu berechnen
bekannt
zu minimieren

**Beispiel:** Gesucht sind die Parameter  $a$  und  $b$  der Geradengleichung  $y=ax+b$ .  
Gegeben sind 3 Messpunkte (2, 4), (5, 11), (8, 15).

Einsetzen der Messpunkte in die Geradengleichung führt auf das Gleichungssystem:

$$4 + \varepsilon_1 = 2a + b$$

$$11 + \varepsilon_2 = 5a + b$$

$$15 + \varepsilon_3 = 8a + b$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$



### 3.2.2 Lösung

Die Anwendung des Gauss'schen Ansatzes (Gl. 2) auf (Gl. 3) führt zu der folgenden allgemeinen Lösung (o.Bew. \*1)

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \cdot \vec{\xi} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \vec{L} \quad (4)$$

Gl. (4) liefert die bestmögliche Lösung im Sinne von (2). → Fehlerminimierung

**Beispiel:** Fortsetzung "Geradenbeispiel"

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 & 15 \\ 15 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{aus (4) } \rightarrow \begin{bmatrix} 93 & 15 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 183 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$A^T \vec{L} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\text{auflösen } \rightarrow \begin{matrix} a = 1.833 \\ b = 0.833 \end{matrix}$$

\*1 s. Einführung in die Numerische Mathematik I, Josef Stoer, Springer Verlag):



## ÜBUNG: Berechnung einer Ausgleichsgerade

Es ist zu zeigen, dass der allg. Lösungsansatz

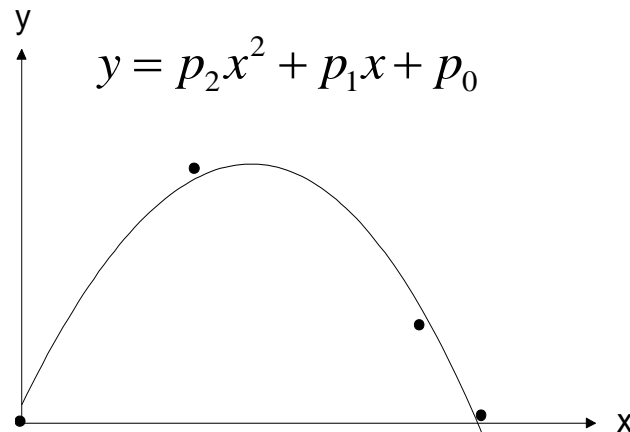
$$\underline{A}^T \underline{A} \cdot \vec{\xi} = \underline{A}^T \cdot \vec{L}$$

für die Ausgleichsgerade das gleiche Ergebnis liefert wie der Lösungsweg in Beispiel 2.



## ÜBUNG: Berechnung eines Polynoms aus Meßwerten

Aufgabenstellung: Von einem physikalischen Prozess sei bekannt, daß er parabelförmig verläuft (z.B. Wurfparabel).



An vier Punkten werden die Koordinaten  $(x,y)$  bestimmt:

$$(x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (2, 6)$$

$$(x_3, y_3) = (5, 3)$$

$$(x_4, y_4) = (6, 0)$$

Bestimmen Sie  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  und geben Sie die Restfehler an.

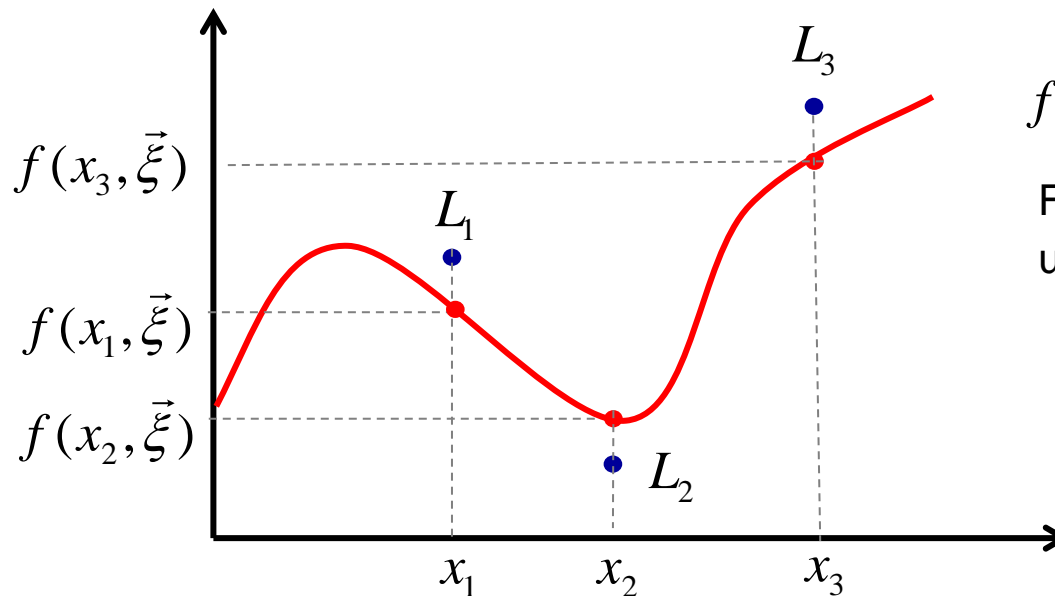


## 3.3 Lösung des Ausgleichsproblems im nichtlinearen Fall

### 3.3.1 Beschreibung

Es sind  $n$  Beobachtungen  $(\vec{x}_i, L_i)$  ( $i=1,2,..n$ ) und ein math. Modell  $f$  gegeben.

Dessen konkreter Verlauf wird festgelegt durch die  $m$  zu bestimmenden und nichtlinear miteinander verknüpften Parameter  $\vec{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m)$ .



$$f(x, \vec{\zeta})$$

Funktion mit der Variablen  $x$   
und den Parametern  $\vec{\zeta}$ .



Allgemein lässt sich das Problem so beschreiben:

$$L_i + \varepsilon_i = f(\vec{x}_i, \vec{\xi}) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Daraus ergeben sich  $n$  nichtlineare Funktionen bezüglich der Parameter  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ .

**Eine Umformung zu einem linearen Gleichungssystem ist hier nicht möglich !**

**Beispiel:** Es ist bekannt, dass ein physikalischer Prozess eine Kreisbahn beschreibt. Die Parameter  $x_m, y_m$  und  $r$  sind jedoch unbekannt:

$$r^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 \quad \text{mit } r \quad : \quad \text{Radius der Kreisbahn}$$

$$x_m, y_m \quad : \quad \text{Kreismittelpunkt}$$

Es liegen die gemessenen Koordinaten mehrerer Bahnpunkte vor:

$$(x_1, y_1) = (10, 0), \quad (x_2, y_2) = (5, 4), \quad (x_3, y_3) = (0, 0), \quad (x_4, y_4) = (5, -4)$$



**ÜBUNG:** Welche Funktionsparameter (a,b,c...) lassen sich linear bestimmen ?

a) 
$$y = a \cdot x^4 + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x^3\right) + c$$

b) 
$$y = a \cdot x^b + 2 \cdot \sin(cx) + 1$$

c) 
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + 1}$$

d) 
$$y = \frac{ax + b}{cx + d} + f$$



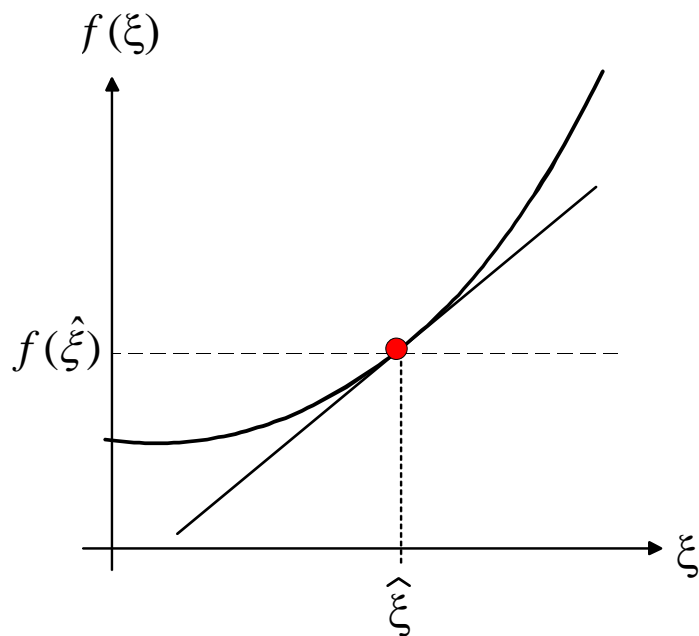
### 3.2.2 Lösungsansatz: Linearisierung der nichtlinearen Funktion

**Gegeben:** - nichtlineare Funktion

- ein bekannter Funktionswert  $f(\hat{\xi})$  bei  $\hat{\xi}$  (Punkt auf dem Funktionsverlauf).

**Gesucht:** - eine lineare Ersatzfunktion (Gerade), die sich in der Nähe des bekannten Punktes näherungsweise wie die nichtlineare Funktion  $f$  verhält.

→ Linearisierung um einen Punkt der Funktion

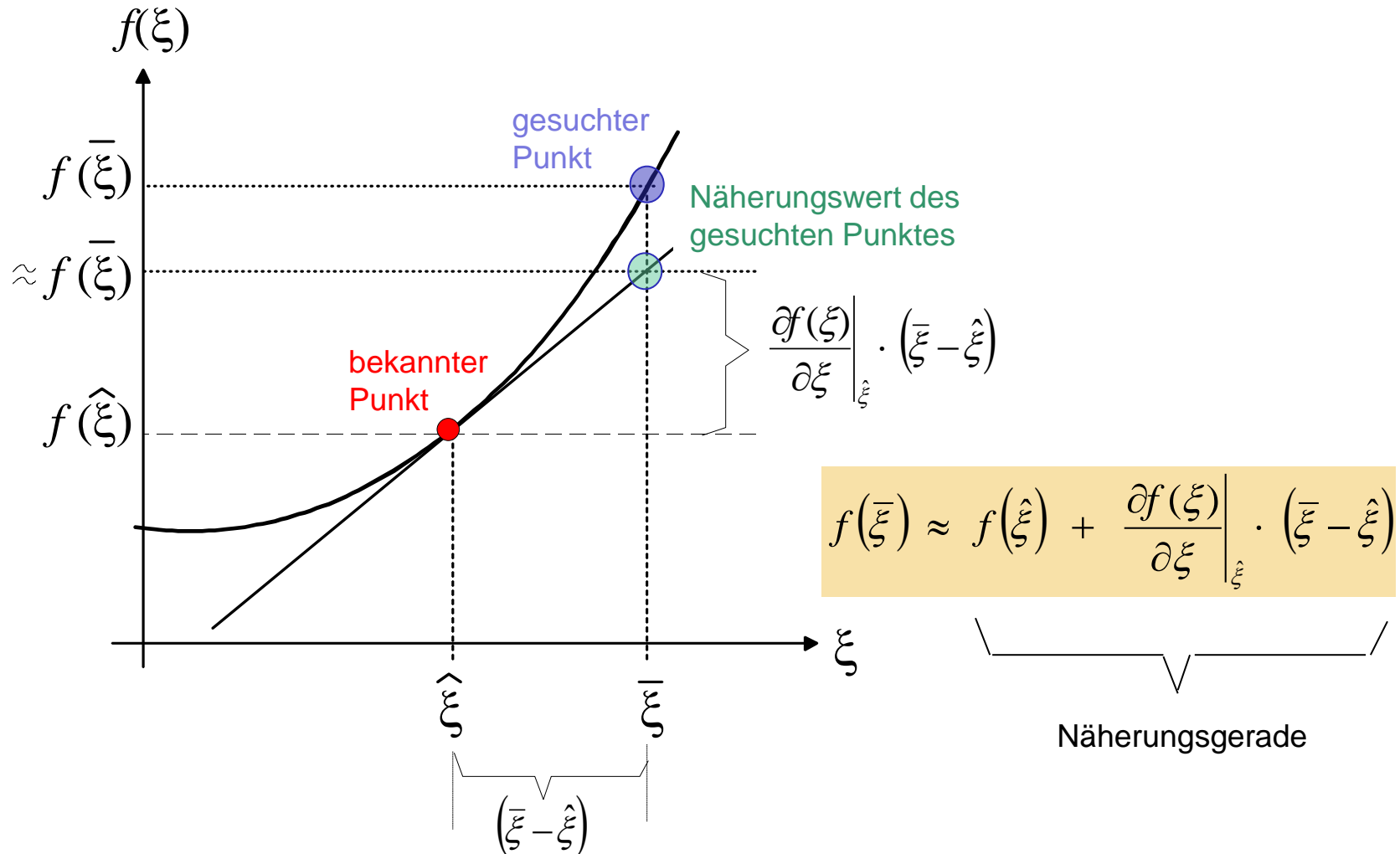


#### Worin liegt der Gewinn?

1. Möglichkeit, eine (kompliziertere) nichtlineare Funktion näherungsweise durch eine (viel einfachere) lineare Funktion (Gerade) ersetzen zu können (zumindest in der Nähe eines bekannten Funktionswertes).
2. Möglichkeit zur vereinfachten (näherungsweisen) Berechnung eines Funktionswertes in der Nähe eines bekannten Funktionswertes.



## Herleitung: Linearisierung einer Funktion $f(\xi)$ um einen Punkt $[\hat{\xi}, f(\hat{\xi})]$





## ÜBUNG: Linearisierung einer Parabel um einen vorgegebenen Punkt

Gegeben ist die Parabel  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Linearisieren Sie die Funktion um den Punkt  $\hat{x} = 2$ ,  $f(\hat{x}) = 1$ .

Wie lautet die Linearisierungsgerade?

Wie groß ist der Fehler der Linearisierung bei  $\hat{x} = 2.1$ ?



### 3.2.3 Linearisierung von Funktionen mit mehreren Variablen

Auch Funktionen mit mehreren Variablen können um einen Punkt linearisiert werden.

So erhält man den Funktionswert  $f(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \dots, \bar{\xi}_m)$  in der Nähe

des gegebenen Funktionswertes  $f(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots, \hat{\xi}_m)$  näherungsweise mit

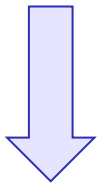
$$\begin{aligned} f(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \dots, \bar{\xi}_m) &= f(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots, \hat{\xi}_m) \\ &+ \left. \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_1} \right|_{\hat{\xi}} \cdot (\bar{\xi}_1 - \hat{\xi}_1) + \left. \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_2} \right|_{\hat{\xi}} \cdot (\bar{\xi}_2 - \hat{\xi}_2) + \dots \end{aligned}$$



## Beispiel: Linearisierung einer Funktion mit 2 Variablen

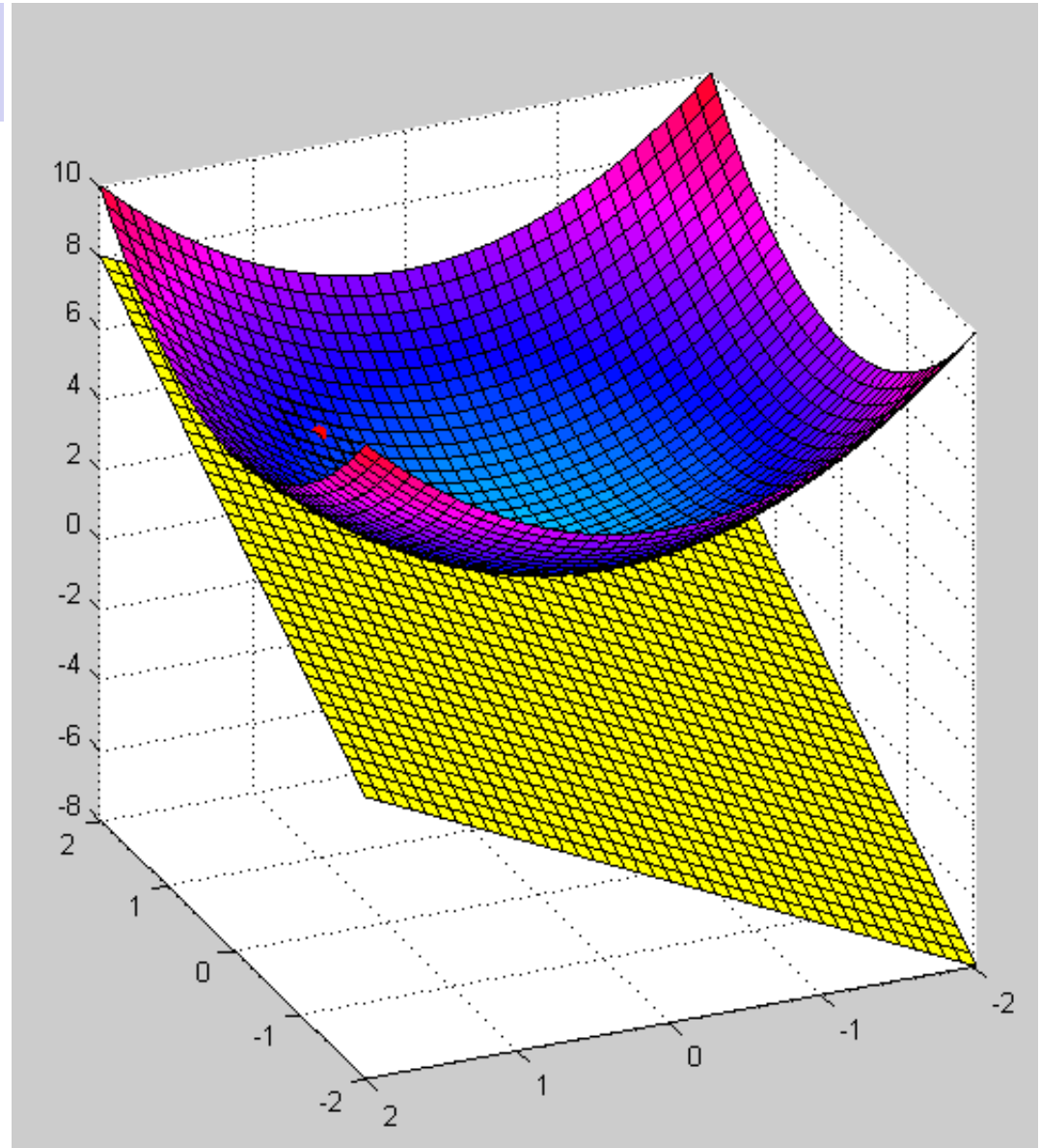
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$$

bei  $x=1, y=1$



Linearisierte Funktion :

$$e(x, y) = 2x + 2y$$





### 3.2.4 Anwendung auf nichtlineare Ausgleichsprobleme

Das nichtlineare Gleichungssystem

$$L_i + \varepsilon_i = f(\vec{x}_i, \vec{\xi}) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

wird um einen Schätzwert  
der Parameter linearisiert :

$$L_i + \varepsilon_i = f(\vec{x}_i, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots, \hat{\xi}_m) + \\ + \left. \frac{\partial f(\vec{x}_i, \vec{\xi})}{\partial \xi_1} \right|_{\vec{\xi}} \cdot (\bar{\xi}_1 - \hat{\xi}_1) + \left. \frac{\partial f(\vec{x}_i, \vec{\xi})}{\partial \xi_2} \right|_{\vec{\xi}} \cdot (\bar{\xi}_2 - \hat{\xi}_2) + \dots$$

$\hat{\xi}_i$  Schätzwerte der gesuchten Parameter (gegeben)

$\bar{\xi}_i$  verbesserte Parameter (gesucht)



oder in Matrixform und mit den Abkürzungen

$$\Delta \xi_i = \bar{\xi}_i - \hat{\xi}_i$$

die sog. „verkürzten Unbekannten“

$$f(\bar{x}_i, \bar{\xi}) = f_i$$

**lineares Gleichungssystem !!!**

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \xi_1 \\ \dots \\ \Delta \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 - f(\bar{x}_1, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m) \\ L_2 - f(\bar{x}_2, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m) \\ \dots \\ L_n - f(\bar{x}_n, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix  $\underline{J}$

Unbekanntenvektor

Lösungsvektor  $\vec{l}$



### 3.2.5 Lösungsalgorithmus

**while**  $\Delta\xi > \text{Fehlerschranke}$

Die Jacobimatrix  $J$  und den Lösungsvektor  $\vec{l}$  mit den Schätzwerten  $(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots, \hat{\xi}_m)$  aktualisieren.

Die "verkürzten Unbekannten"  $\Delta\vec{\xi}$  mit dem linearisierten Glchgs.-Syst. berechnen.

Mit den "verkürzten Unbekannten" und dem letzten Schätzwert die „verbesserten Unbekannten“ berechnen:

$$\bar{\xi}_i = \hat{\xi}_i + \Delta\xi_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Die "verbesserten Unbekannten" als neuen Schätzwert nehmen.

**endwhile**



## ÜBUNG: Nichtlineare Ausgleichung

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = a \cdot e^{-bx}$

Weiter sind folgende Messwerte gegeben: (0.5, 1.1), (1.0, 0.4), (2.0, 0.055)

Die initialen Schätzwerte der Parameter sind:  $a_0 = 4$ ,  $b_0 = 3$

Die Parameter  $a$  und  $b$  sind durch Ausgleichung zu verbessern.



```
% Iterieren bis Fehlergrenze unterschritten
```

```
- while norm(DeltaXi) > 1e-4
```

```
    % aktuelle Jacobimatrix J berechnen
```

```
    J = [ exp(-b*x1), -a*x1*exp(-b*x1); ...  
          exp(-b*x2), -a*x2*exp(-b*x2); ...  
          exp(-b*x3), -a*x3*exp(-b*x3); ];
```

```
    % aktuellen Lösungsvektor l berechnen
```

```
    l = [ y1 - a*exp(-b*x1) ; ...  
          y2 - a*exp(-b*x2) ; ...  
          y3 - a*exp(-b*x3) ];
```

```
    % Lösen des Gleichungssystems
```

```
    DeltaXi = linsolve(J, l);
```

```
    % Aktualisierung der Parameter a und b
```

```
    a = a + DeltaXi(1);
```

```
    b = b + DeltaXi(2);
```

```
end
```



## Fortsetzung ... : Entwicklung von $\underline{J}$ , $\vec{l}$ und $\Delta\vec{\zeta}$ über mehrere Iterationen

```

J =          l =          DeltaXi =
  0.2231    -0.4463          0.2075
  0.0498    -0.1991          0.2009
  0.0025    -0.0198          0.0451
          -2.2361
          -1.5820

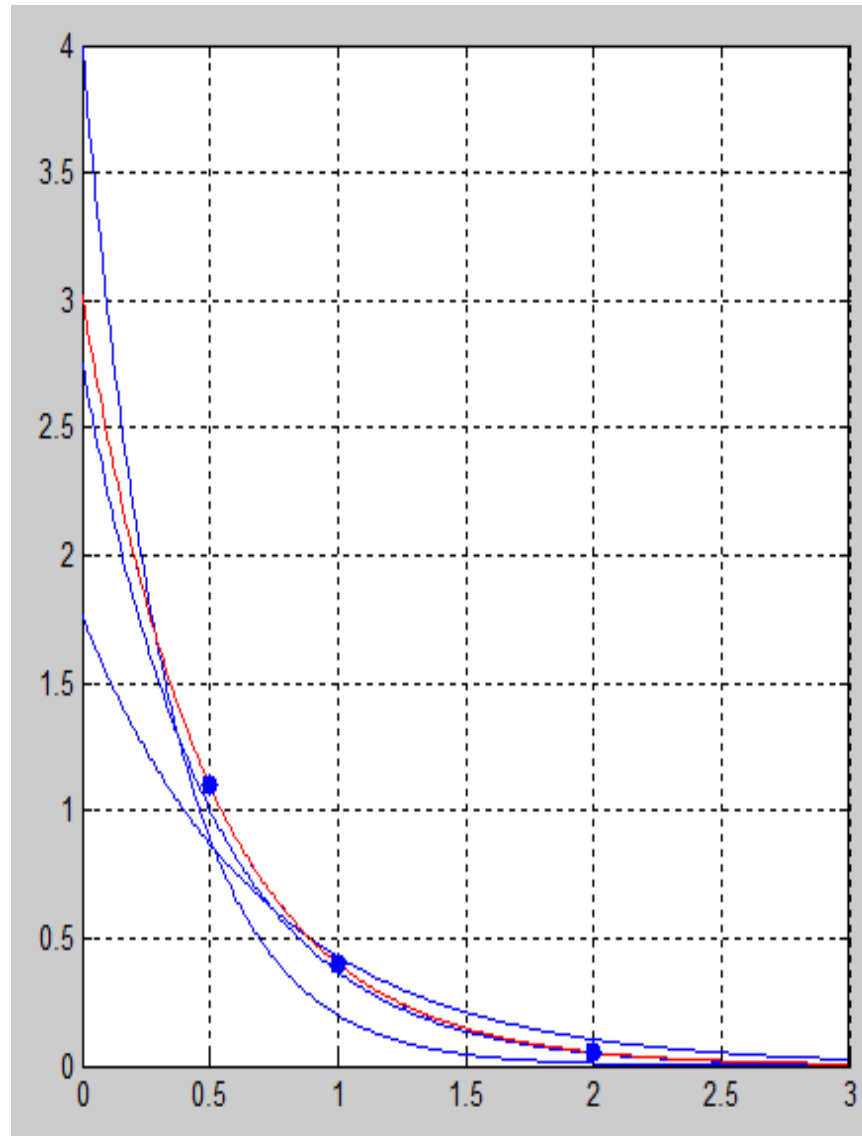
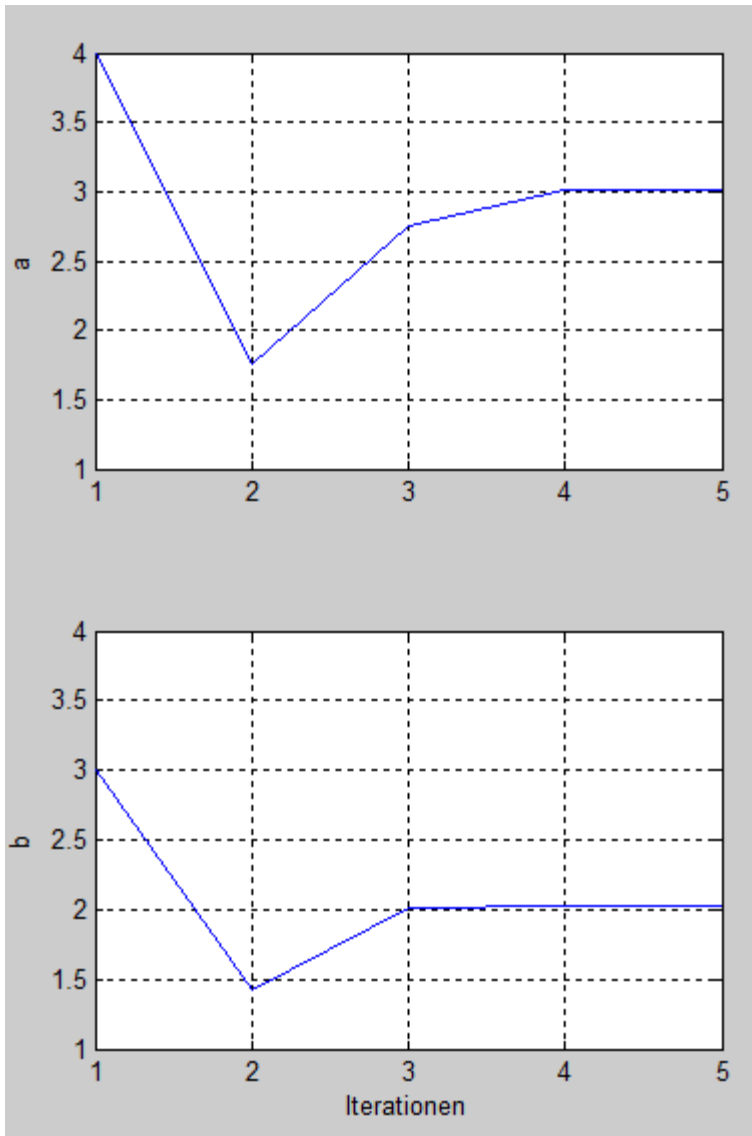
J =          l =          DeltaXi =
  0.4921    -0.4340          0.2319
  0.2422    -0.4272         -0.0272
  0.0587    -0.2069         -0.0485
          0.9883
          0.5955

J =          l =          DeltaXi =
  0.3654    -0.5028          0.0943
  0.1335    -0.3675          0.0325
  0.0178    -0.0981          0.0059
          0.2664
          0.0064

J =          l =          DeltaXi =
  0.3643    -0.5498          0.0005
  0.1327    -0.4005         -0.0005
  0.0176    -0.1063          0.0019
          1.0e-003 *
          0.0674
          -0.5129

J =          l =          DeltaXi =
  0.3643    -0.5499          0.0002
  0.1327    -0.4007         -0.0007
  0.0176    -0.1064          0.0018
          1.0e-005 *
          -0.2801
          -0.1560

```





## Fortsetzung des Beispiels: Berechnung der Kreisbahn

Die nichtlinearen Fehlergleichungen lauten:

$$L_i + \varepsilon_i = r^2 - (x_i - x_m)^2 - (y_i - y_m)^2 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_m} = 2 \cdot (x_i - x_m)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_m} = 2 \cdot (y_i - y_m)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial r} = 2 \cdot r$$

den Messwerten (s.o.)  
und den Startwerten

$$x_m = 5.0$$

$$y_m = 5.0$$

$$r = 10$$

erhält man die  
Jacobimatrix A :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_m} & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} & \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_m} & \frac{\partial f_3}{\partial y_m} & \frac{\partial f_3}{\partial r} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_m} & \frac{\partial f_4}{\partial y_m} & \frac{\partial f_4}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +10 & -10 & 20 \\ 0 & -2 & 20 \\ -10 & -10 & 20 \\ 0 & -18 & 20 \end{bmatrix}$$



und der Lösungsvektor :

$$l_i = L_i - f_i(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots, \hat{\xi}_m)$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \left( r^2 - (x_1 - x_m)^2 - (y_1 - y_m)^2 \right) \\ 0 - \left( r^2 - (x_2 - x_m)^2 - (y_2 - y_m)^2 \right) \\ 0 - \left( r^2 - (x_3 - x_m)^2 - (y_3 - y_m)^2 \right) \\ 0 - \left( r^2 - (x_4 - x_m)^2 - (y_4 - y_m)^2 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -99 \\ -50 \\ -19 \end{bmatrix}$$

Das zu lösende Gleichungssystem lautet somit:

$$\begin{bmatrix} +10 & -10 & 20 \\ 0 & -2 & 20 \\ -10 & -10 & 20 \\ 0 & -18 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_m - 5 \\ \bar{y}_m - 5 \\ \bar{r} - 10 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -99 \\ -50 \\ -19 \end{bmatrix}$$

Daraus ergibt sich die verbesserte Lösung:

$$\bar{x}_m = 5, \quad \bar{y}_m = 0, \quad \bar{r} = 4.775$$