Vorbereitende Grundlagen für Elektrotechnik 1

Prof. Dr.-Ing. Andreas Meisel

Hinweis zu den verwendeten Notationen

a) Farbliche Kennzeichnung im Vorlesungsskript

rote Umrandung z.B.: $\boxed{Q = C \cdot U}$

→ verwenden wir für Berechnungen

→ man muss die Randbedingungen für die Anwendbarkeit verstanden haben um die Formel korrekt anwenden zu können

grüne Umrandung z.B. $\boxed{Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}$

→ kompakte Beschreibung einer physikalischen Aussage

→ man muss die Formel interpretieren und an konkrete Randbedingungen anpassen können

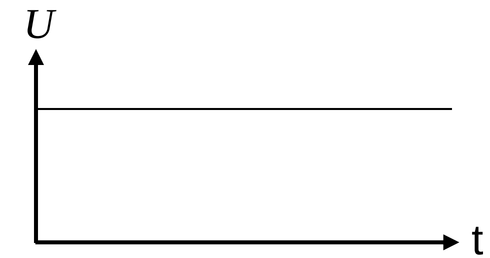
→ I. allg. werden wir mit diesen Formeln nichts berechnen.

graue Umrandung z.B.: $\boxed{Q = C \cdot U}$

→ Es wird bezug genommen auf eine bereits früher eingeführte Beziehung.

b) Groß- und Kleinschreibung elektrotechnischer Größen

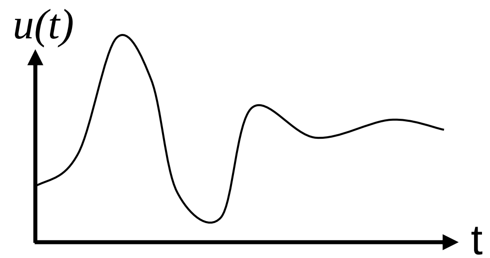
Zeitlich konstante Größen: Großbuchstaben



Beispiele:

	Spannung	U
	Strom	I
	Widerstand	R
	usw.	

Zeitveränderliche Größen: Kleinbuchstaben



Beispiele:

	Spannung	u oder $u(t)$
	Strom	i oder $i(t)$
	usw.	

Physikalische und mathematische Grundlagen

Was soll erreicht werden ?

Es soll Verständnis geschaffen werden zu folgenden Sachverhalten:

a) Verbindung zwischen Elektrotechnik und Mechanik
→ Arbeit und Leistung

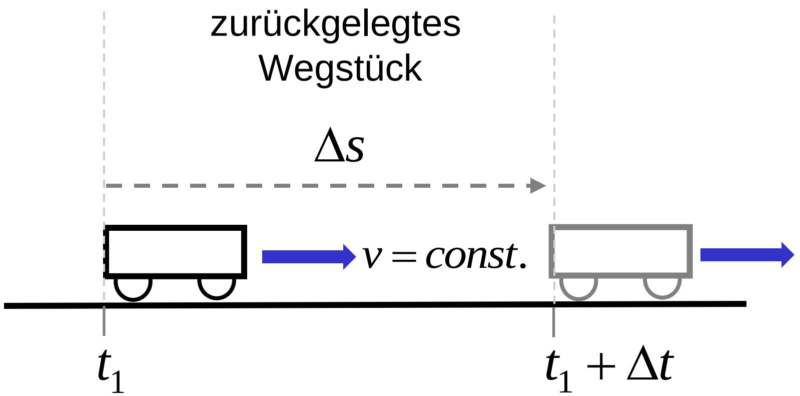
b) Rückführung elektrischer Größen auf Basiseinheiten
→ kg, m und s

c) Physikalische Interpretation von math. Operationen und Notationen
→ Differentiation,
→ Integration,
→ Vektoren

1. Kinematik – Beschreibung von Bewegungen

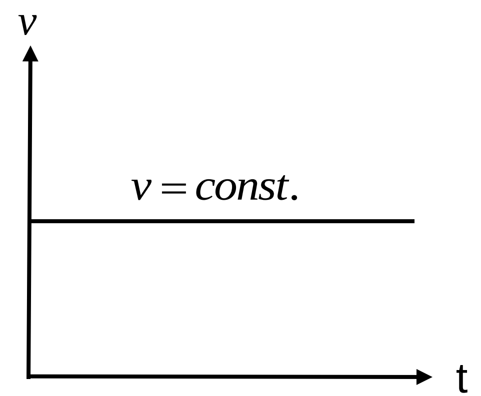
1.1 Geschwindigkeit

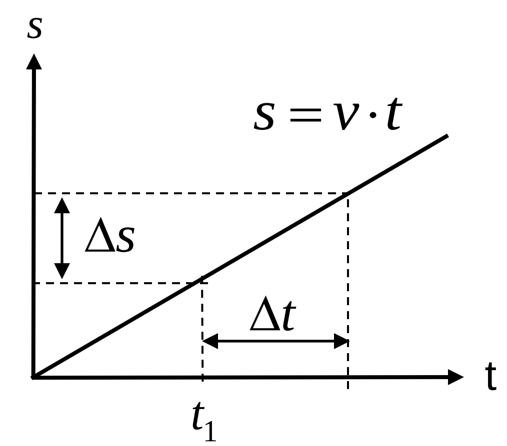
v:	Geschwindigkeit	$[v]$=m/s
s:	Weg	$[s]$=m
t:	Zeit	$[t]$=s



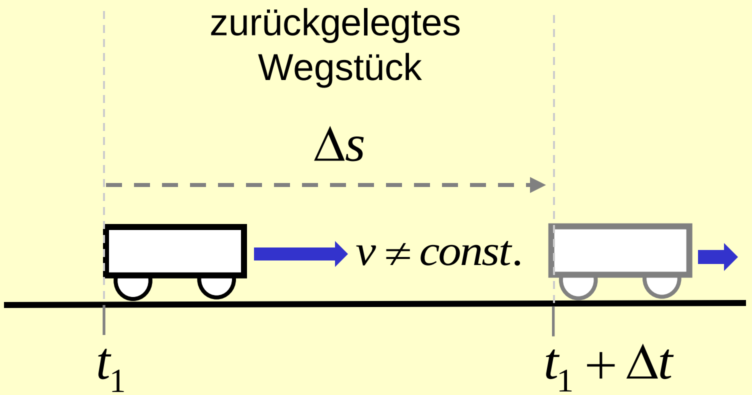
Im Falle <u>konstanter Geschwindigkeit</u> gilt:

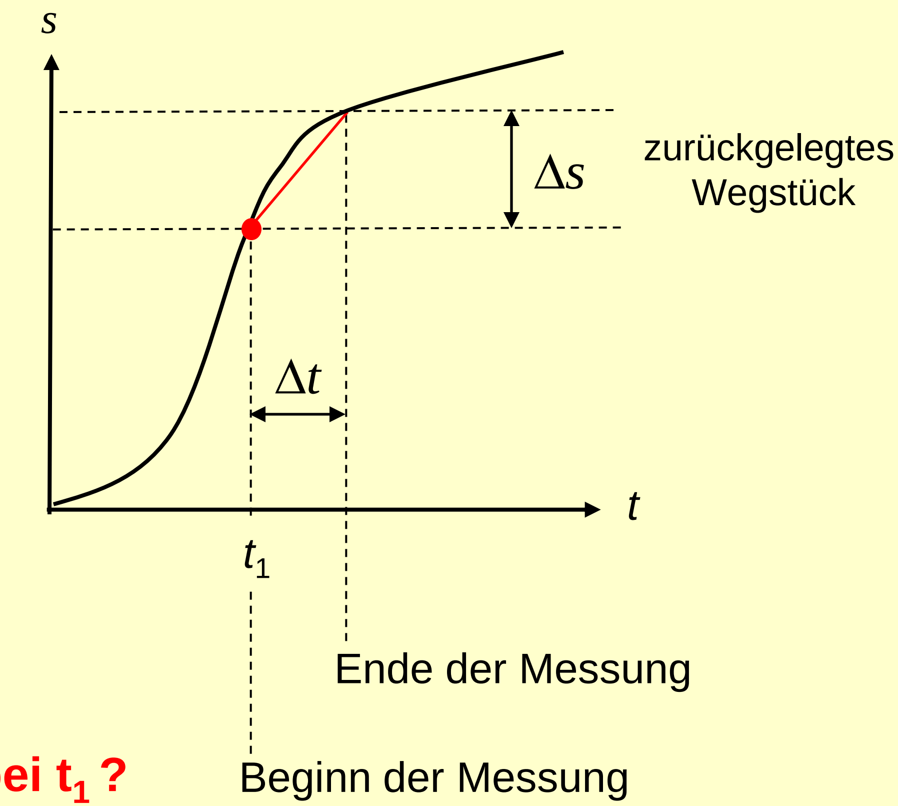
$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$





Gedankenspiel : Geschwindigkeitsmessung bei <u>zeitveränderlichem *v(t)*</u>



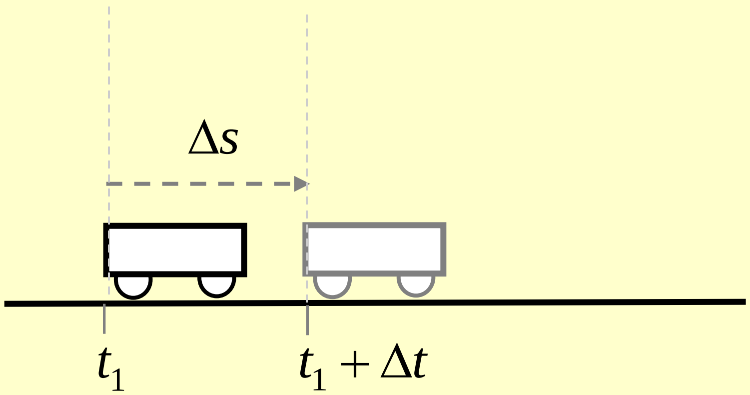


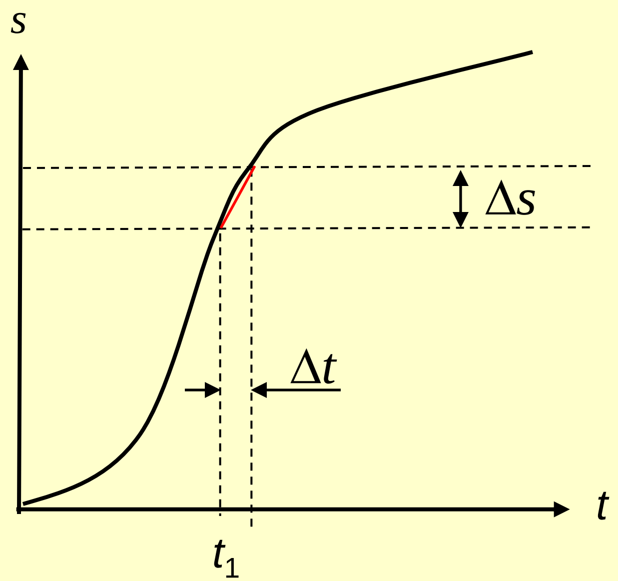
Wie groß ist die Geschwindigkeit bei t_1 ?

<u>Ansatz</u>: Schätzung mit $v(t_1) \approx \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

→ ungenau !!

Verbesserung: Δt sehr klein machen





Ansatz: wieder Schätzung mit $v(t_1) \approx \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

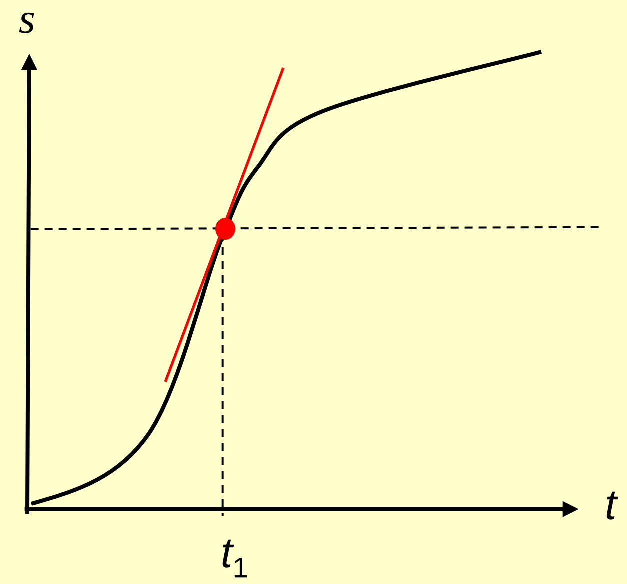
→ $v(t_1)$ ist jetzt genauer, aber noch nicht exakt !

<u>Am besten</u>: $\Delta t \rightarrow 0$

infinitesimales Wegstück

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

infinitesimale Zeitdifferenz



Für zeitveränderliche Geschwindigkeit gilt:

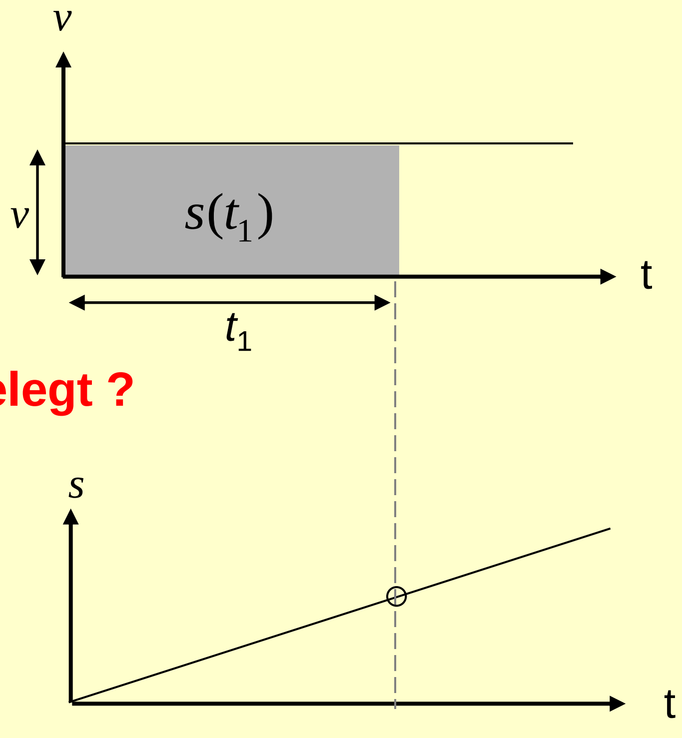
$$\boxed{v(t) = \frac{ds}{dt}}$$

d.h. differenzieren

Gedankenspiel : Bestimmung des Weges bei <u>konstantem</u> *v(t)*

Konstante Geschwindigkeit:

$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$



Welcher Weg wird bis t_1 zurückgelegt ?

Formales Umstellen der Formel:

$$\Rightarrow \quad s(t) = v \cdot t$$

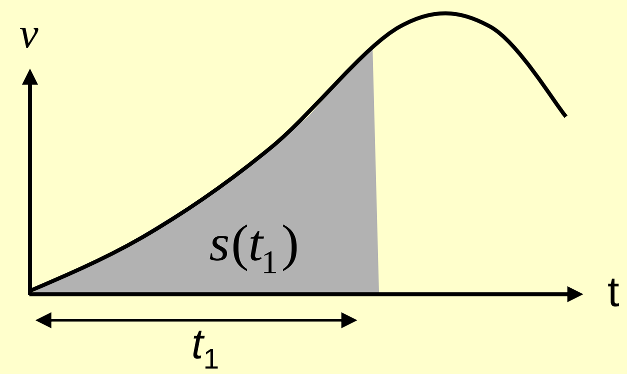
Andere Interpretation:

$s(t_1) = v \cdot t_1$ ist die <u>Rechteckfläche unter der Funktion</u> *v(t)* = const.

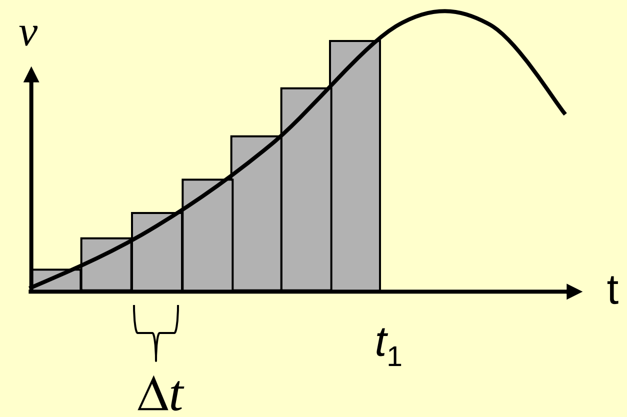
Gedankenspiel : Bestimmung des Weges bei zeitveränderlichem $v(t)$

Zeitveränderliche Geschwindigkeit:

$$\boxed{v(t) = \frac{ds}{dt}}$$



Welcher Weg wird bis t_1 zurückgelegt ?



Ansatz:

1. Zerlegen der Funktion in rechteckförmige Abschnitte.
2. Aufsummieren der Rechteckflächen.

$$s(t_1) \approx \sum_{i=1}^{7} v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

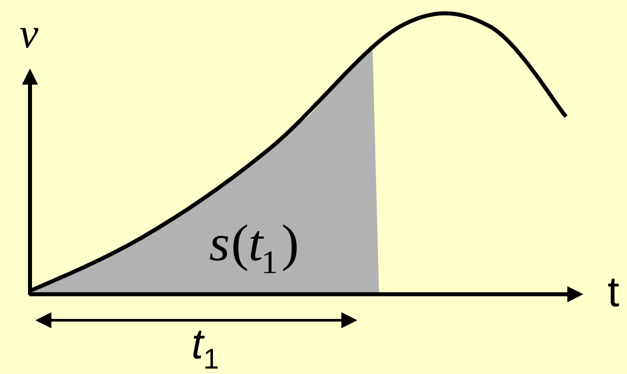
→ recht ungenau !!

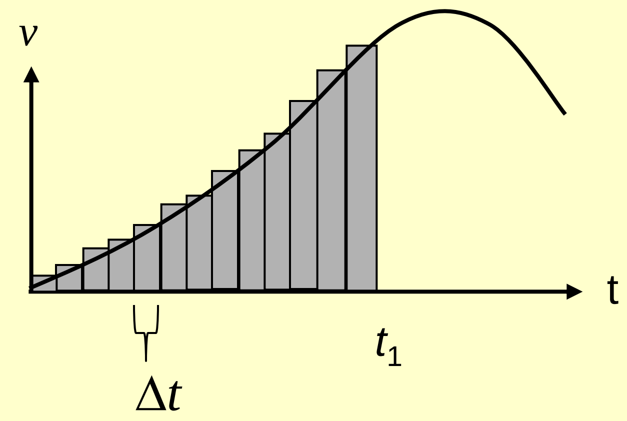
→ Tafel

<u>Verbesserung</u>: Δt kleiner machen

$$s(t_1) \approx \sum_{i=1}^{13} v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

→ besser, aber nicht exakt !



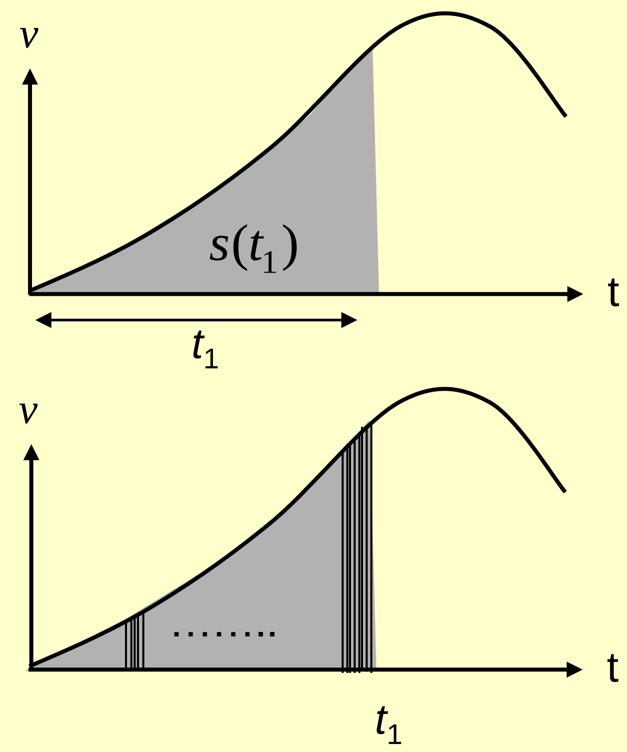


<u>Am besten</u>: $\Delta t \rightarrow 0$

$$s(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{t_1/\Delta t} v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

oder kurz $\boxed{s(t_1) = \int_0^{t_1} v(t) \cdot dt}$

d.h. integrieren



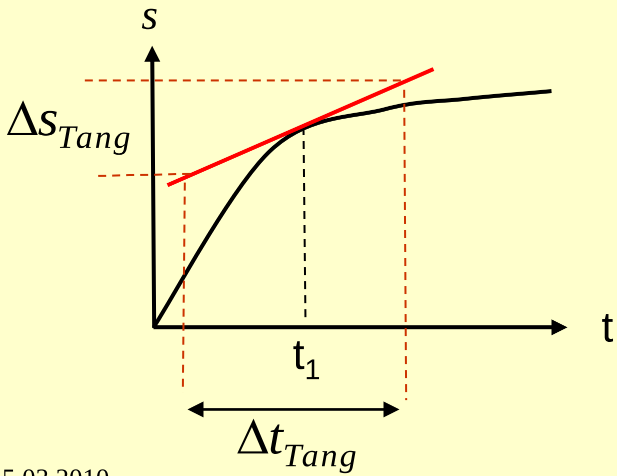
Fazit: Praktischer Umgang mit Differentialausdrücken

Fall 1: s(t) liegt als analytische Funktion vor und v(t) soll berechnet werden.

→ Rechenregeln der Differentialrechnung anwenden (s. Vorlesung Mathematik)

Beispiel: $s(t) = a_0 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d(a_0 \cdot t^2)}{dt} = 2a_0 t$

Fall 2: s(t) liegt numerisch (Tabelle) oder als Diagramm vor und $v(t_1)$ soll bestimmt werden.



Lösung durch:

1. Tangente an die Funktion s(t) bei t_1 anlegen
2. Tangentensteigung bestimmen.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s_{Tang}}{\Delta t_{Tang}}$$

Fazit: Praktischer Umgang mit Integralausdrücken

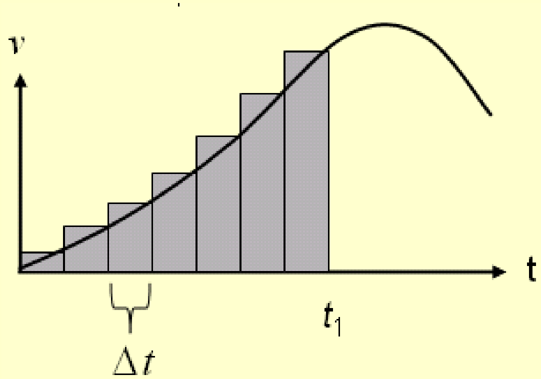
Fall 1: v(t) liegt als analytische Funktion vor und
s(t) soll berechnet werden.

→ Rechenregeln der Integralrechnung anwenden (s. Vorlesung Mathematik)

Beispiel: $v(t) = 10\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + 2\frac{m}{s}$

$$\Rightarrow \quad s(t_1) = \int_0^{t_1} \left(10\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + 2\frac{m}{s}\right) \cdot dt = 10\frac{m}{s^3} \cdot \frac{t_1^3}{3} + 2\frac{m}{s} \cdot t_1$$

Fall 2: v(t) liegt numerisch (Tabelle) oder als Diagramm vor und
$s(t_1)$ soll bestimmt werden.



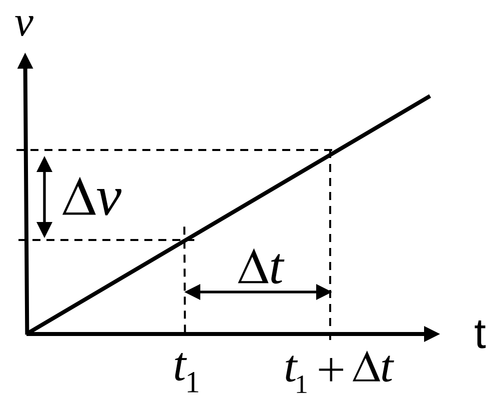
Lösung durch:

1. Kurve in n Rechtecke zerlegen
2. Gesamtfläche der Rechtecke bestimmen.

$$s(t_1) = \int_o^{t_1} v \cdot dt \approx \sum_{i=1}^{n} v(\Delta t \cdot i) \cdot \Delta t$$

1.2 Beschleunigung

a) Beschleunigung konstant

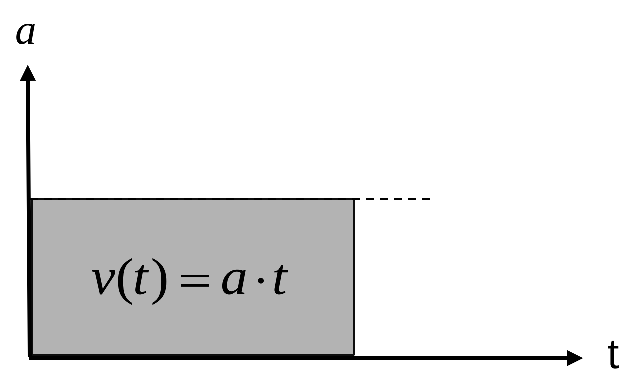


$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Beschleungung = Geschwindigkeitsänderung pro Zeitdifferenz

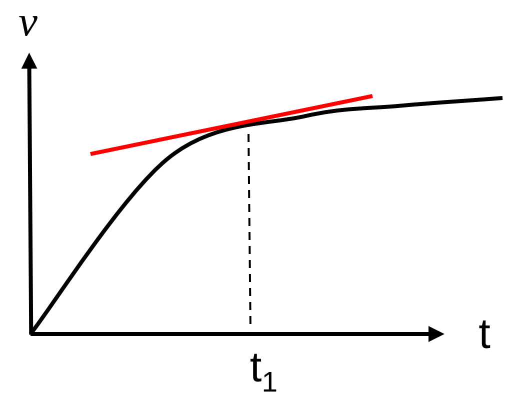
a:	Beschleunigung	$[a]$=m/s^2

$$\boxed{v = a \cdot t}$$



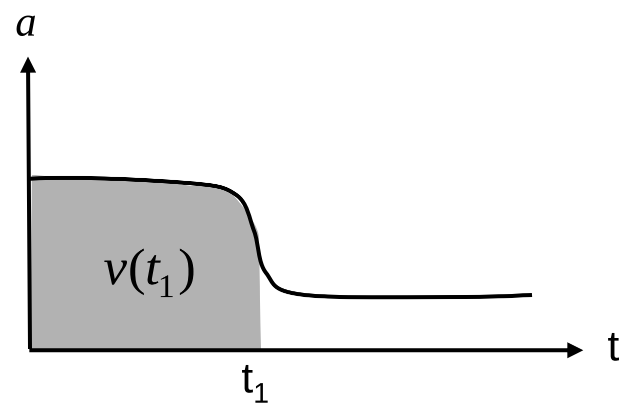
Geschwindigkeit = Fläche unter der Funktion a(t)

b) Beschleunigung zeitveränderlich



$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

Beschleungung = Geschwindigkeitsänderung pro infinitesimaler Zeitdifferenz
= Tangentensteigung in der Funktion v(t)



$$\boxed{v(t_1) = \int_o^{t_1} a(t) \cdot dt}$$

Geschwindigkeit = Fläche unter der Funktion a(t)

2. Dynamik – Ursache von Bewegungen

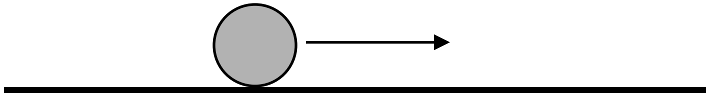
2.1 Trägheit

Ein Körper, auf den keine Kräfte wirken, bewegt sich
- geradlinig
- gleichförmig (konstante Geschwindigkeit).

Die Geschwindigkeit 0 ist nur ein Sonderfall der gleichförmigen Bewegung.

Beispiel 1: durch den Weltraum treibender Planetoid

Beispiel 2: eine einmal angestoßene Kugel rollt auf einer horizontalen Ebene ewig ....



….. würde es keine die Bewegung abbremsenden Kräfte geben (z.B. Luftreibung).

2.2 Kraft und Masse

Wirkt auf einen Körper eine Kraft ein, so ändert sich sein Bewegungszustand, er beschleunigt (oder beschleunigt negativ = bremsen).

Wie stark der Bewegungszustand geändert wird hängt
- von der Kraft F ab, die auf den Körper einwirkt und
- von einer Eigenschaft des Körpers, die als Masse m bezeichnet wird.

Die Masse ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers.

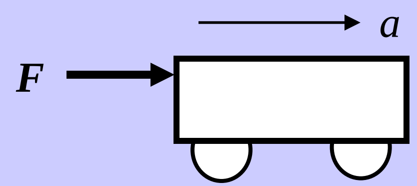
Einheiten: $[F] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$ Newton

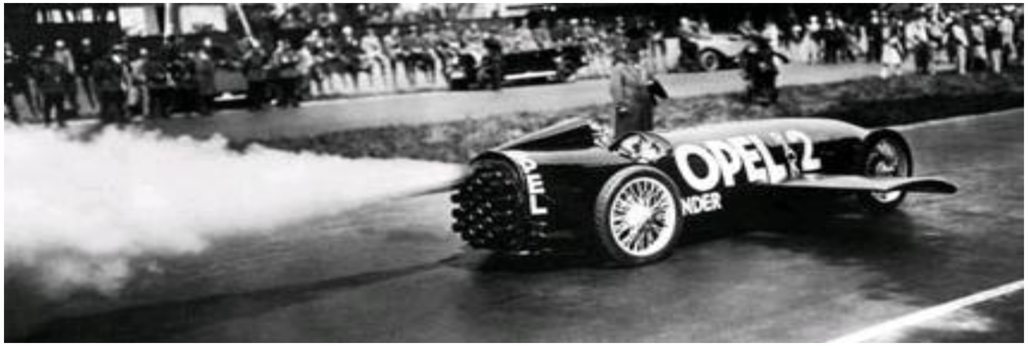
$[m] = kg$

Es gilt das Newtonsche Gesetz: $\boxed{F = m \cdot a}$

Fall 1: Bei gegebener Kraft und Masse kann die Beschleunigung berechnet werden.

Beispiel: Auf ein Auto (m=800kg) wirkt eine Kraft von 1600N. Wie groß ist die Beschleunigung des Autos?





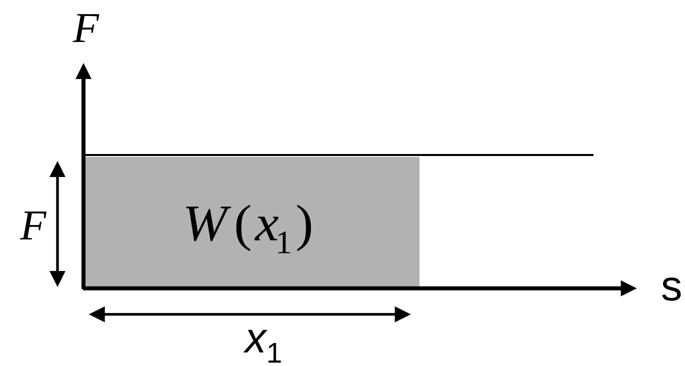
Fall 2: Bei gegebener Beschleunigung kann die auf den Körper wirkende Kraft berechnet werden.

Beispiel: Ein Auto fährt vor eine Wand und wird dabei mit $100 m/s^2$ abgebremst. Welche Kraft wirkt auf den Fahrer (100 kg)?

3. Arbeit, Energie und Leistung

3.1 Arbeit

Verschiebt eine <u>konstante Kraft F</u> einen Massepunkt um den Weg s, so führt sie der Masse eine Arbeit (Energie) W zu:

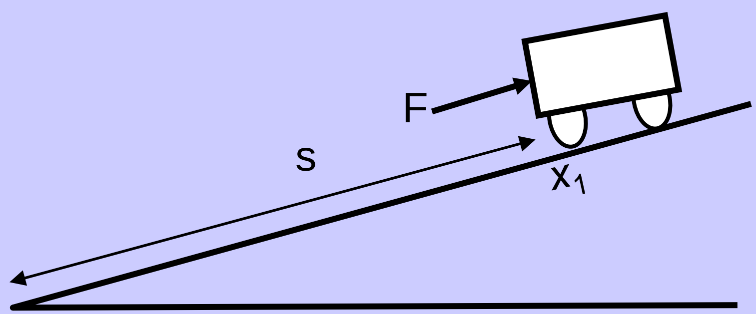


Bei <u>zeitlich konstanter Kraft</u> und gleicher Richtung von Kraft und Weg gilt:

$$\boxed{W = F \cdot s}$$

<u>Einheit:</u> $[W] = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = Nm = J$ Joule

Beispiel: Ein Wagen wird mit einer Kraft von 800 N eine Rampe von 10m Länge hinaufgeschoben. Wie groß ist die geleistete Arbeit?



Bei <u>zeitlich veränderlicher Kraft</u> und gleicher Richtung von Kraft und Weg gilt:

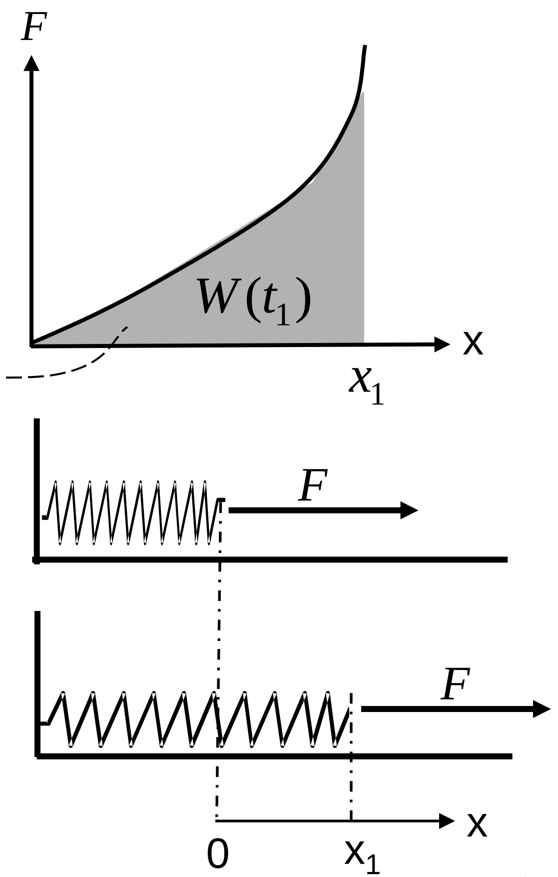
$$\boxed{W = \int F \cdot ds}$$

Beispiel: Eine Spiralfeder mit dem angegebenen Kraft-Weg-Verlauf wird von x=0 bis zu x=x_1 auseinandergezogen.

Wie groß ist die in der Feder gespeicherte Energie?

$$\Rightarrow \quad W = \int_0^{x_1} F \cdot dx$$

= Fläche unter der $F(s)$-Kurve



3.2 Kinetische Energie

Um einen Körper mit der Masse m auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu bringen, muss Arbeit verrichtet werden.

Diese Arbeit steckt dann in Form von *kinetischer Energie* im Körper.

$$W = \int F \cdot ds = \int m \cdot a \cdot ds = m \cdot \int \frac{dv}{dt} \cdot ds$$

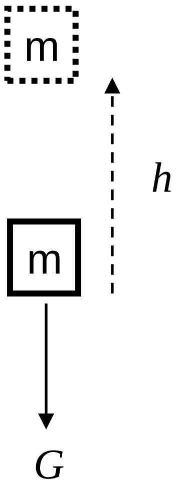
$$= m \cdot \int \frac{ds}{dt} \cdot dv = m \cdot \int v \cdot dv = \frac{mv^2}{2}$$

$$\boxed{W_{kin} = \frac{mv^2}{2}}$$

Beispiel: Welche kinetische Energie steckt in einer Abrissbirne von 2000 kg, wenn diese sich mit 10m/s bewegt?

3.3 Potentielle Energie

Hebt man eine Masse m um die Höhe h an, so leistet man gegen die Gewichtskraft G eine Arbeit.



$$G = m \cdot g$$ mit der Erdbeschleunigung g = 9.81 m/s^2

$$W = F \cdot s = G \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

Da diese Energie sich potentiell in kinetische Energie rückverwandeln lässt (durch fallenlassen), spricht man von *potentieller Energie*.

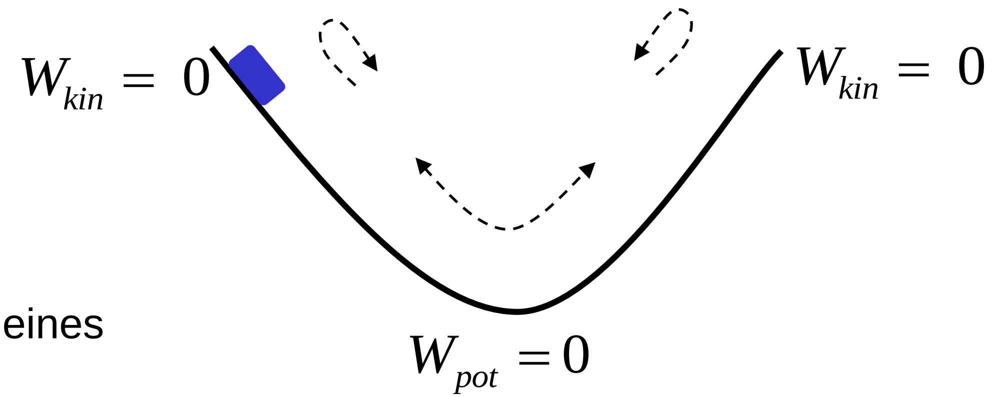
$$\boxed{W_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$

Beispiel: Welche Energie muss ein Radfahrer (m=100kg) aufwenden, um einen 1500m hohen Berg hochzufahren (ohne Reibung).

3.4 Energieerhaltungssatz

Sieht man einmal von der (unvermeidlichen) Reibung ab, so gilt:

$$\boxed{W_{pot} + W_{kin} = const.}$$



<u>Im reibungsfreien Fall gilt</u>:

Die mechanische Gesamtenergie eines Körpers bleibt konstant.

<u>Beispiel</u>: Ein Auto rollt (beginnend bei 0m/s) reibungsfrei einen 80m hohen Berg hinunter. Wie schnell ist es unten (km/h)?

<u>Anm.:</u> Die Rotationsenergie der Räder soll vernachlässigt werden.

3.5 Leistung

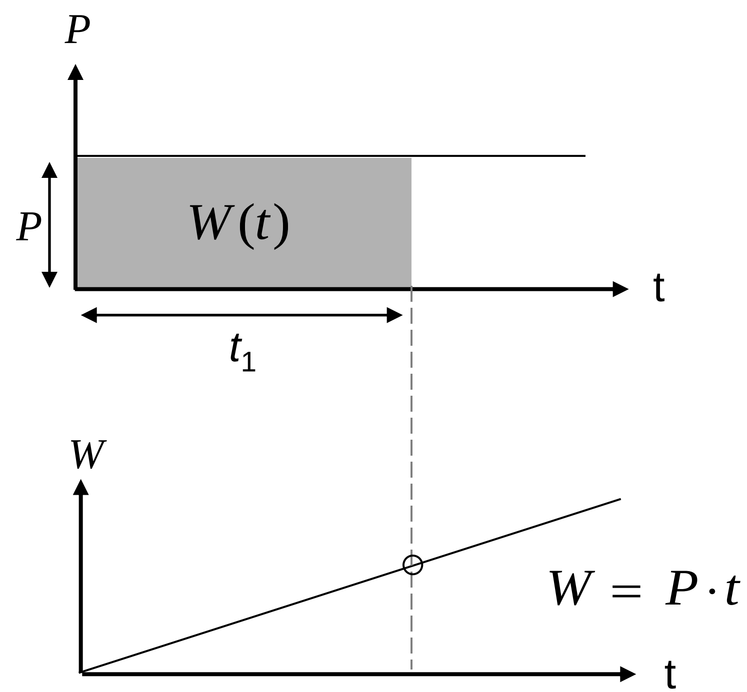
Bei der Arbeit W spielt es keine Rolle, in welcher Zeit diese Arbeit vollbracht wurde.

Beispiel: In beiden Fällen ist die Arbeit gleich:

1. Arbeiter A trägt 10 Sack Zement (a 50 kg) in 15 Min. in die 3. Etage (10m).
2. Arbeiter B trägt 10 Sack Zement (a 50 kg) in 60 Min. in die 3. Etage (10m).

Im Falle einer konstanten Leistung gilt:

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{W = P \cdot t}$$



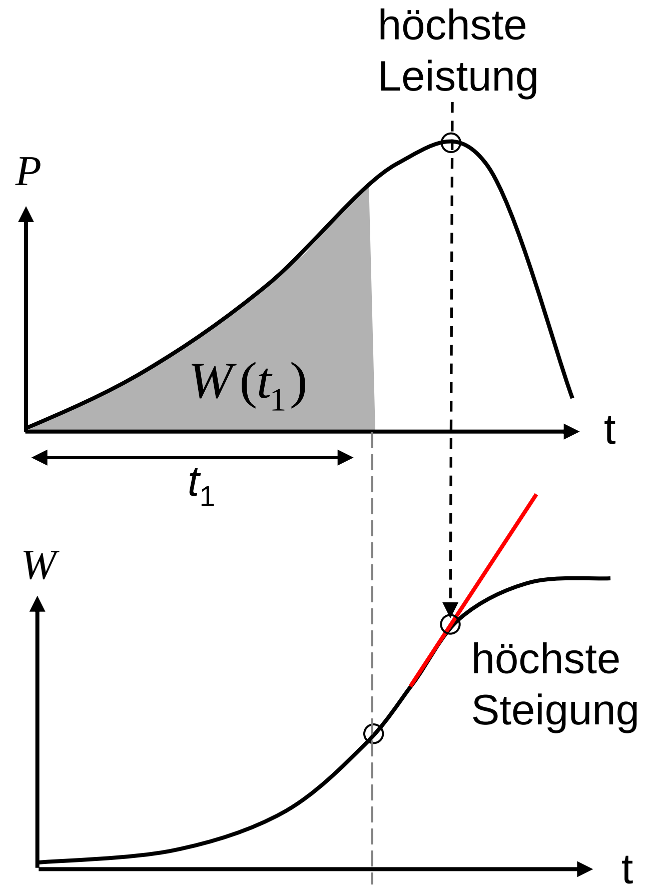
Einheit:

$$[P] = \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} = W \qquad \text{Watt}$$

Im Falle einer <u>zeitveränderlichen Leistung</u> gilt:

$$\boxed{W = \int P(t) \cdot dt}$$

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

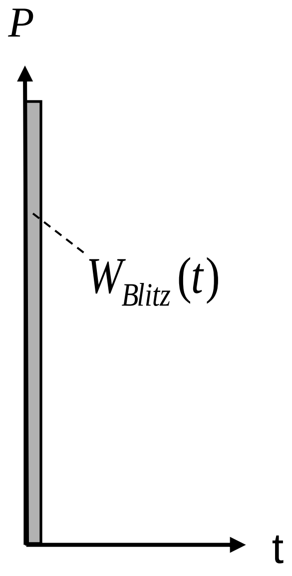


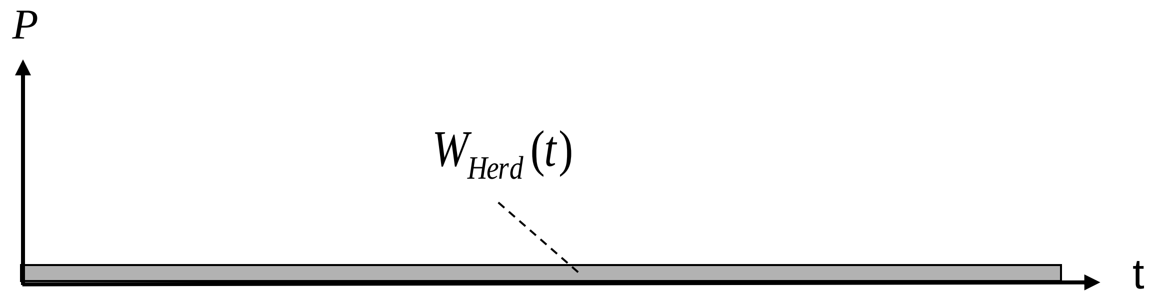
Beispiel: Blitz eines Gewitters - Herdplatte

Bei dem Blitz eines Gewitters wird eine Energie von etwa 30kWh frei.
Der Blitz dauert etwa 0.01s.

Bei welcher Leistung setzt der Blitz seine Energie frei ?

Wie lange könnte man eine 2 kW-Herdplatte mit der Energie des Blitzes betreiben?





4. Vektorielle Größen

4.1 Begriffe

Skalare Größen: Größen, die nur durch einen Betrag beschrieben werden.

Beispiele: Temperatur, Leistung, Arbeit, …

Vektoren: Größen, die durch Betrag und Richtung beschrieben werden

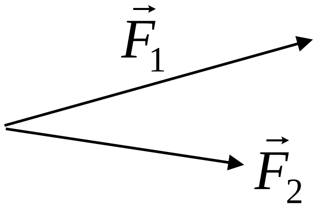
Beispiele: Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, ….

Vektoren ………. : -werden mit einem Pfeil über dem Formelzeichen gekennzeichnet

Beispiele: $\vec{s},\ \vec{v},\ \vec{a},\ \vec{F}$

- bildlich als Pfeile dargestellt, wobei die Länge proportional zum Betrag ist

- es gibt Rechenregeln für Vektoren, wie Addition, Subtraktion, ….



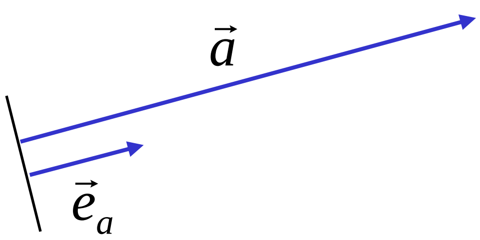
4.2 Vektorbetrag und Einheitsvektor

Math. Beschreibung des Vektorbetrages: $|\vec{a}| = a$

Teilt man einen Vektor $\vec{a}$ durch seine Länge (Betrag) a, so erhält man einen Vektor der Länge 1 mit der gleichen Richtung wie der Vektor $\vec{a}$.

Ein Vektor der Länge 1 wird als *Einheitsvektor* bezeichnet.

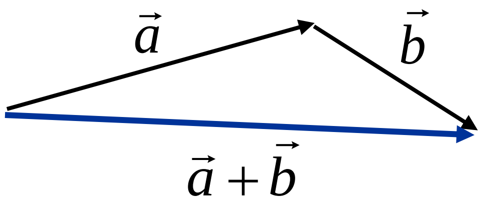
$$\boxed{\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a}$$

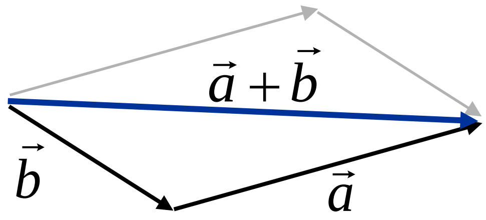


$$\boxed{|\vec{e}_a| = 1}$$

4.3 Vektoraddition und -subtraktion

Man addiert zwei Vektoren, indem man den zweiten Vektor so parallel verschiebt, bis sein Anfangspunkt auf dem Endpunkt des ersten Vektors liegt.





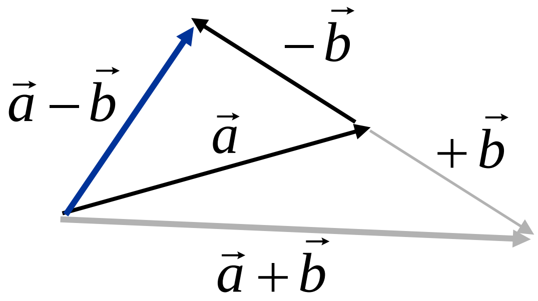
Es ist offensichtlich, dass ausserdem gilt:

$$\boxed{|\vec{a}+\vec{b}| \leq a+b}$$

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}}$$

Man subtrahiert zwei Vektoren $\vec{a}-\vec{b}$, indem man zunächst die Richtung des Vektors $\vec{b}$ umkehrt und dann die beiden Vektoren addiert.

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})}$$



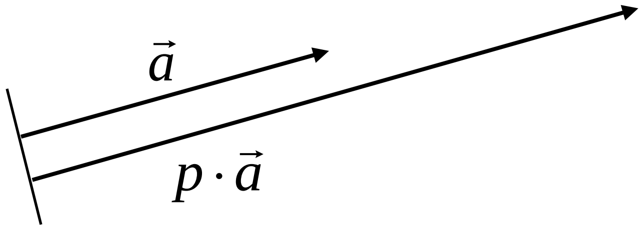
4.4 Multiplikation von Vektor und Skalar

p sei ein Skalar (z.B. eine reelle Zahl).

Das Produkt $p \cdot \vec{a}$
ist ein Vektor der Länge $p \cdot a$
und der gleichen Richtung wie $\vec{a}$:

$$\boxed{p \cdot \vec{a} \;=\; p \cdot a \cdot \vec{e}_a}$$

Beispiel: $p = 2$



4.5 Skalarprodukt von Vektoren

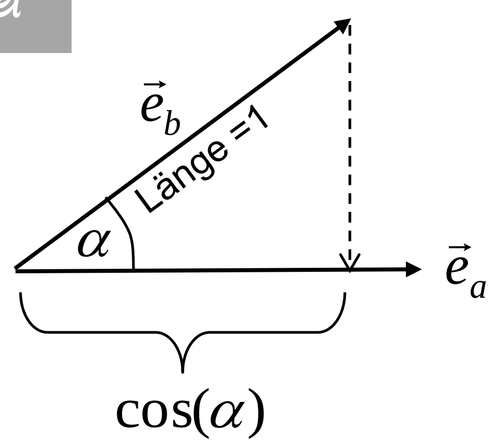
Def.: Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren versteht man das Produkt der Vektorlängen multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels α.

Das Ergebnis des Skalarproduktes ist ein **Skalar** !

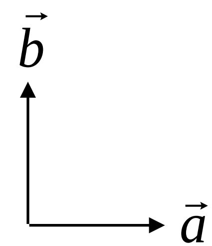
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha)}$$

Anschauliche Interpretation:
$\cos(\alpha)$ ist derjenige Anteil von $\vec{e}_b$, der in Richtung von $\vec{e}_a$ zeigt.

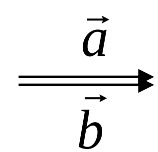
→ Tafel



Sonderfälle:



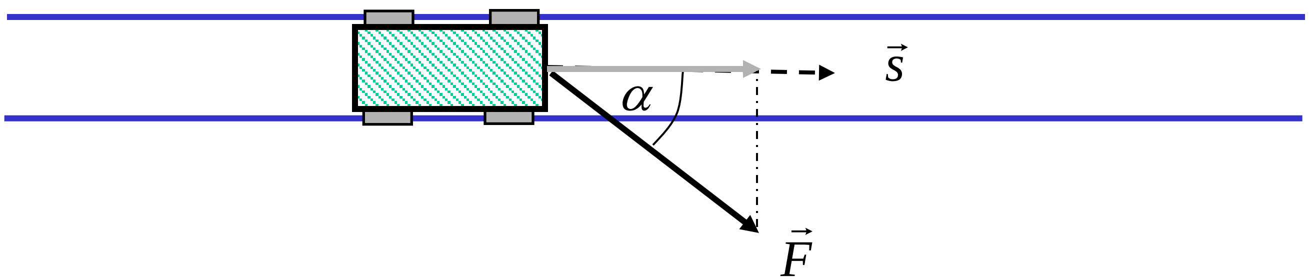
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b$$

Anwendungsbeispiel 1 des Skalarproduktes

Beispiel: Ein Schienenfahrzeug wird mit einem Seil wie angegeben gezogen.
Die Seil wird mit einer konstanten Kraft von 500 N gezogen.
Der Winkel zwischen Zugrichtung und Fahrtrichtung beträgt 30°(u. 80°).
Welche Bewegungsenergie steckt im Fahrzeug nach10m?



Hier gilt:

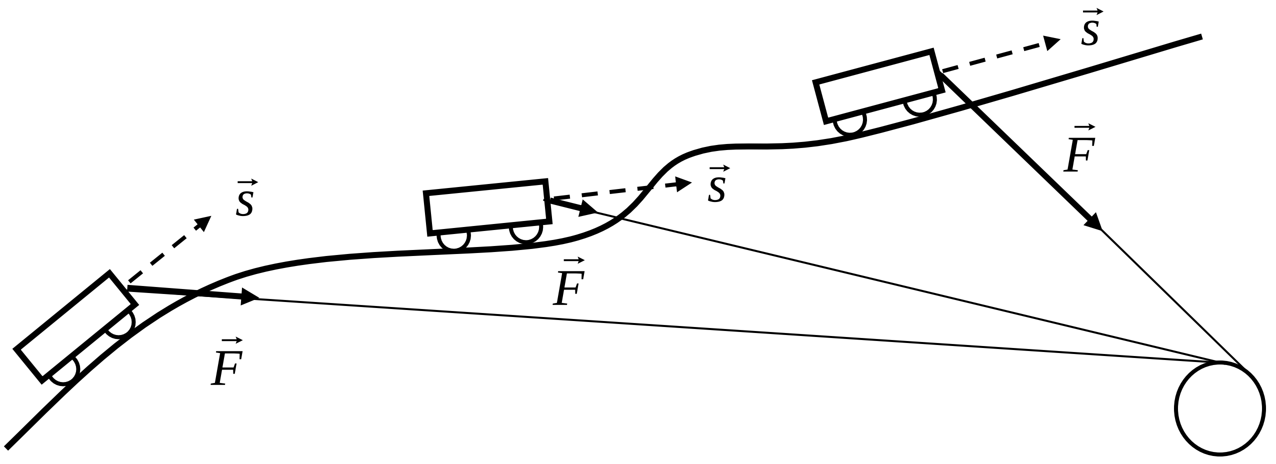
- die Kraft- und Bewegungsrichtung zeigen nicht in die gleiche Richtung
- die Kraft sowie der Winkel α sind konstant

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)}$$ vektorielle Form

Durch das Skalarprodukt werden nur die für die Arbeit relevanten Kraftanteile berücksichtigt.

Anwendungsbeispiel 2 des Skalarproduktes

Beispiel: Eine Winde zieht ein Rollwagen eine Bahn hinauf ?
Welche Energie muss dafür aufgebracht werden.



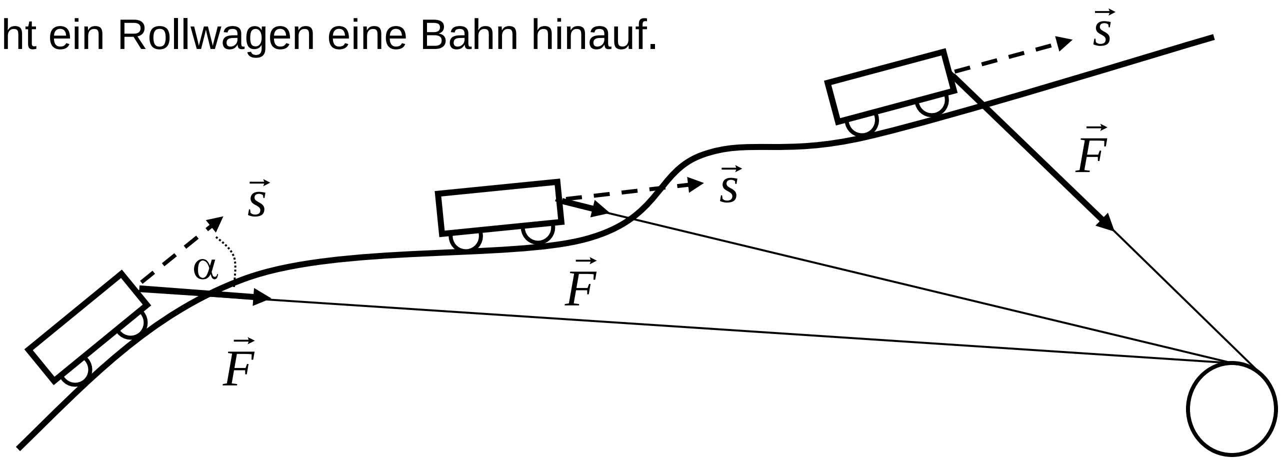
<u>Hier gilt:</u>

- die Kraft- und Bewegungsrichtung zeigen nicht in die gleiche Richtung
- die Kraft sowie der Winkel α sind veränderlich

$$\Rightarrow \boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

ÜBUNG: Automatisches Messsystem zur Energieerfassung

Eine Winde zieht ein Rollwagen eine Bahn hinauf.



Ein auf dem Rollwagen befindlicher Computer soll zu jedem Zeitpunkt automatisch die für die Fahrt aufgebrachte Energie bestimmen und anzeigen.

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

Mit geeigneten Sensoren werden die <u>Zugkraft</u> F, die <u>Zugrichtung</u> α sowie der <u>gefahrene Weg</u> s (Drehgeber am Rad) erfasst.

Es ist ein Algorithmus zu skizzieren, mit dem die Berechnung durchgeführt werden kann.

4.6 Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von Vektoren

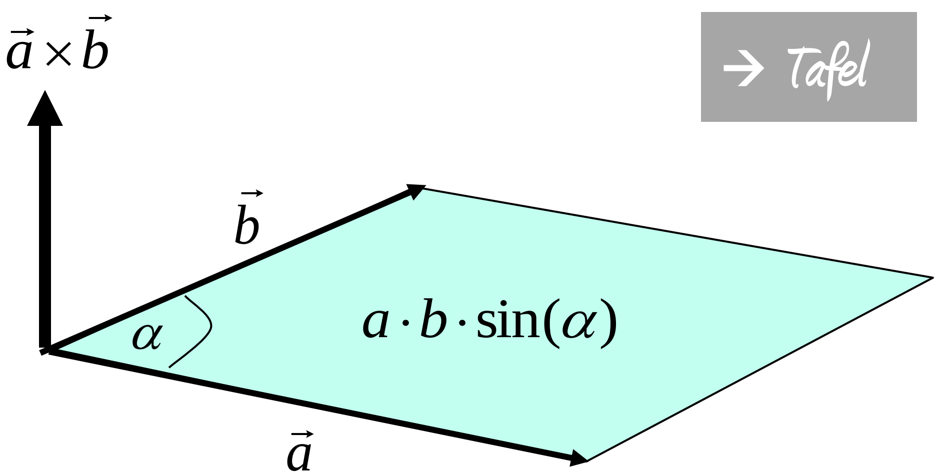
Def.: Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist ein **Vektor,** der <u>senkrecht auf der von den Eingangsvektoren aufgespannten Ebene</u> steht.

Der Betrag des Kreuzproduktes ist das Produkt der Vektorlängen multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels α.

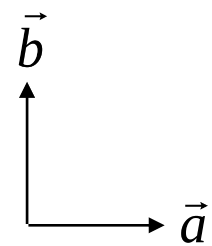
$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}$$ = <u>Betrag</u> des Kreuzproduktes

<u>Anschauliche Interpretation</u>:
Der Betrag entspricht der Fläche, welche durch die beiden Vektoren aufgespannt wird.

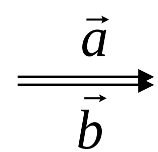
→ Tafel



<u>Sonderfälle:</u>



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$$

zur Richtung des Ergebnisvektors (Rechte-Hand-Regel)